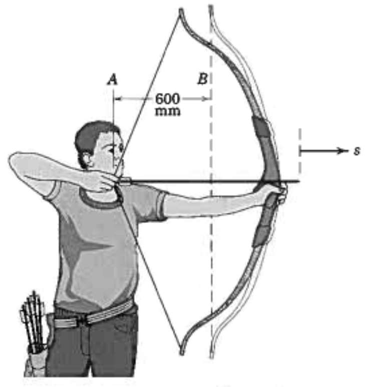
FEUP - MIEIC **FÍSICA I - EIC0010 - 2008/2009**

NOME:________________________________ **LOG-IN FEUP:**__________

Exame de recurso | Ponto 1 | 22 de Julho de 2009

Duração: Duas horas. Com consulta de formulário. Pode usar calculadora, mas **apenas para fazer contas** e nunca como meio de cópia ou de consulta!

1. (3 valores). Num tiro com arco (ver figura ao lado), a aceleração da flecha diminui linearmente em função da distância, s, desde um valor máximo inicial de 4800 m/s^2, na posição A, até zero, na posição B que se encontra 600 mm à direita de A. Calcule a velocidade com que sai disparada a flecha.



2. (5 valores). A equação de evolução dum sistema dinâmico de segunda ordem é:
$\ddot{x} + \dot{x}^2 + 4\,x^2 = 4$.

(a) Escreva a equação de evolução na forma de um sistema autónomo com duas variáveis de estado.

(b) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema.

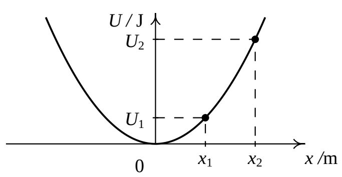
(c) Determine a matriz jacobiana.

(d) Caracterize cada um dos pontos de equilíbrio.

(e) Se no instante $t = 0$ o estado do sistema for $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 1$, use o método de Euler para calcular o estado em $t = 0.1$, usando um incremento de tempo $\Delta t = 0.1$

PERGUNTAS. *Cotação:* Respostas certas, 0.8, erradas, -0.2, em branco, 0. Cada pergunta tem uma única resposta. Serão avaliadas apenas as respostas que apareçam na caixa de **Resposta** (e não na folha de exame ou de rascunho).

3. O gráfico da figura representa a energia potencial U, em joules, em função da posição x, em metros, de uma partícula com massa igual a 4 kg; os valores no gráfico são $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $U_1 = 25$ e $U_2 = 100$. Se a partícula parte do repouso, na posição x_2, com que velocidade chegará ao ponto x_1?



(**A**) 3.06 m/s (**C**) 24.49 m/s (**E**) 12.25 m/s
(**B**) 6.12 m/s (**D**) 7.96 m/s

Resposta: ☐

4. A matriz jacobiana de um sistema dinâmico com variáveis de estado (x, y), é:

$$\begin{bmatrix} y & x-1 \\ y+1 & x \end{bmatrix}$$

Sabendo que (0, 0) é ponto de equilíbrio do sistema, determine que tipo de ponto é.

(**A**) foco repulsivo (**D**) ponto de sela
(**B**) nó atractivo (**E**) nó repulsivo
(**C**) centro

Resposta: ☐

5. Qual das seguintes equações podera ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

(**A**) $\dot{y} = 2\,y - 5\,y^2$ (**D**) $\dot{y} = x + x\,y^2$
(**B**) $\dot{y} = 6\,y - y^2$ (**E**) $\dot{y} = 2\,y^2 - 3\,y$
(**C**) $\dot{y} = 2\,x\,y + 3\,y$

Resposta: ☐

6. Qual das seguintes curvas de evolução é mais difícil de calcular em forma numérica?

(**A**) Uma órbita heteroclínica.
(**B**) Uma curva que entra num foco atractivo.
(**C**) Uma recta na direcção de um vector próprio.
(**D**) Uma curva que entra num nó atractivo.
(**E**) Um ciclo.

Resposta: ☐

7. Uma bola, movendo-se com velocidade horizontal $\vec{v}$, choca com uma parede vertical. Imediatamente após o choque, a bola adquire a velocidade $-\vec{v}$. Relativamente à bola, verificou-se:

(**A**) Não conservação da energia cinética e conservação da componente vertical da quantidade de movimento.
(**B**) Não conservação da energia cinética e não conservação da quantidade de movimento.
(**C**) Não conservação da energia cinética e conservação da quantidade de movimento.
(**D**) Conservação da energia cinética e conservação da quantidade de movimento.
(**E**) Conservação da energia cinética e não conservação da quantidade de movimento.

Resposta: ☐

8. As equações de evolução de um sistema linear são:

$\dot{x} = x + 2\,y \qquad \dot{y} = x + y$

Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

(**A**) Foco atractivo.
(**B**) Ponto de sela.
(**C**) Nó repulsivo.
(**D**) Foco repulsivo.
(**E**) Centro.

Resposta: ☐

9. Uma partícula desloca-se ao longo do eixo dos x de forma que a sua velocidade é dada pela expressão:

$v(x) = b\,e^{-n\,x}$

onde b e n são duas constantes. Qual é a expressão para a aceleração da partícula em função da posição x?

(**A**) $n\,b^2\,e^{-n\,x}$
(**B**) $-n\,b^2\,e^{-2\,n\,x}$
(**C**) $-n\,b\,e^{-n\,x}$
(**D**) $-b\,e^{-(n+1)x}$
(**E**) $-n\,b^2\,e^{-n\,x}$

Resposta: ☐

10. As equações de um sistema de duas espécies com competição são:

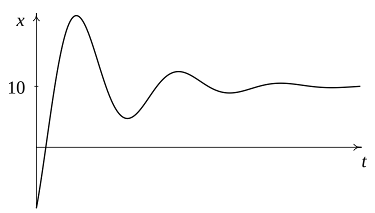
$\dot{x} = x(2 - x - 0.5\,y)$, $\dot{y} = y(2 - y - 0.5\,x)$

sabendo que as duas espécies coexistem em forma harmoniosa, calcule os valores de x e y após muito tempo.

(**A**) 4/3 e 4/3
(**B**) 2/3 e 2/3
(**C**) 0 e 2
(**D**) 0 e 0
(**E**) 2 e 0

Resposta: ☐

11. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado x e y tem um ponto de equilíbrio no ponto $x = 10$, $y = 5$. O gráfico mostra a evolução da variável x em função de tempo. Que tipo de ponto é esse ponto de equilíbrio?



(**A**) nó atractivo
(**B**) foco atractivo
(**C**) centro
(**D**) nó repulsivo
(**E**) foco repulsivo

Resposta: ☐

12. Um rapaz carrega uma mochila cheia de livros pendurada às costas. Considerando as forças seguintes:

1. Peso da mochila e dos livros, na vertical.
2. Força de contacto entre a mochila e as costas do rapaz, na horizontal.
3. Tensão nas fitas da mochila, com componentes horizontal e vertical.

Quais dessas forças actuam sobre o rapaz?

(**A**) 1 e 3
(**B**) 1 e 2
(**C**) unicamente 1
(**D**) 2 e 3
(**E**) 1, 2 e 3

Resposta: ☐

13. De acordo com o critério de Bendixson, qual dos seguintes sistemas dinâmicos não pode ter nenhum ciclo, nem órbita homoclínica nem órbita heteroclínica?

(**A**) $\dot{x} = 3xy \quad \dot{y} = 2xy$
(**B**) $\dot{x} = 2xy^2 \quad \dot{y} = x^2 y$
(**C**) $\dot{x} = xy \quad \dot{y} = x^3 y$
(**D**) $\dot{x} = xy^2 \quad \dot{y} = -x^2 y$
(**E**) $\dot{x} = -2xy \quad \dot{y} = -xy$

Resposta: ☐

14. Considere um pêndulo ideal, sem forças de atrito. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(**A**) Os valores próprios da matriz jacobiana são sempre reais.
(**B**) Todos os pontos de equilíbrio são centros ou pontos de sela.
(**C**) A variação do ângulo em função do tempo é uma função seno ou co-seno.
(**D**) Todas as curvas de evolução são ciclos.
(**E**) É um sistema linear.

Resposta: ☐

15. Na lista seguinte, qual pode ser o conjunto limite negativo de uma trajectória no espaço de fase?

(**A**) nó atractivo
(**B**) centro
(**C**) foco atractivo
(**D**) ciclo limite atractivo
(**E**) ponto de sela

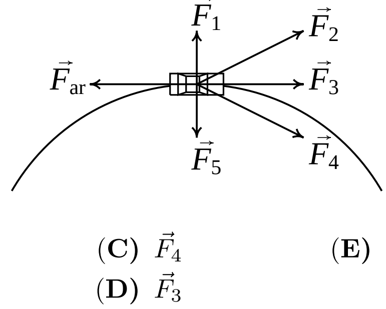
Resposta: ☐

16. Um sistema diz-se autónomo se:

(**A**) O seu estado não depende do tempo
(**B**) Não depende de outros sistemas
(**C**) A sua evolução a partir dum estado inicial é igual em diferentes instantes
(**D**) Não tem nenhum ponto de equilíbrio instável
(**E**) Sobre ele não actua nenhuma força externa

Resposta: ☐

17. Um automóvel desloca-se numa curva, com velocidade de módulo constante. A figura mostra o automóvel visto de cima e a força de resistência do ar, $\vec{F}_{\text{ar}}$. Qual das cinco forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ ou $\vec{F}_5$ representa melhor a força exercida pelo chão sobre o automóvel?



(**A**) $\vec{F}_1$
(**B**) $\vec{F}_2$
(**C**) $\vec{F}_4$
(**D**) $\vec{F}_3$
(**E**) $\vec{F}_5$

Resposta: ☐

Problemas

1. No intervalo $0 \le s \le 0.6$ m, a equação da aceleração, em unidades SI, é:

$$a = 4800 - \frac{4800}{0.6}s = 4800\left(1 - \frac{s}{0.6}\right)$$

que pode ser substituída na equação

$$a = v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s}$$

para obter uma equação diferencial de variáveis separáveis:

$$4800\left(1 - \frac{s}{0.6}\right)\mathrm{d}\,s = v\,\mathrm{d}\,v \quad \Rightarrow \quad 4800\int_0^{0.6}\left(1 - \frac{s}{0.6}\right)\mathrm{d}\,s = \int_0^{v} v\,\mathrm{d}\,v$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} = 4800\left(0.6 - \frac{0.6^2}{2\times 0.6}\right) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{4800\times 0.6} = 53.7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

2. (a) Define-se uma segunda variável de estado:

$$v = \dot{x}$$

e substitui-se na equação do sistema:

$$\dot{v} + v^2 + 4x^2 = 4$$

As duas equações de evolução, para as duas variáveis de estado, são:

$$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = 4 - v^2 - 4x^2$$

(b) Para resolver esta alínea não é preciso ter resolvido a alínea anterior. Basta reparar que nos pontos de equilíbrio x permanece constante e, portanto, $\dot{x} = \ddot{x} = 0$. Substituindo na equação do sistema,

$$4x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

(c) Usando as equações obtidas na alínea (a),

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial v} \\ \dfrac{\partial(4 - v^2 - 4x^2)}{\partial x} & \dfrac{\partial(4 - v^2 - 4x^2)}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8x & -2v \end{bmatrix}$$

(d) Substituindo $x = 1$ e $v = 0$ na matriz jacobiana obtemos:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Como o traço dessa matriz é nulo e o determinante é 8, os valores próprios serão imaginários. O ponto $x = 1$, $v = 0$ é um centro. Substituindo $x = -1$ e $v = 0$ na matriz jacobiana obtemos:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Como o traço dessa matriz é nulo e o determinante é -8, os valores próprios são reais, com sinais opostos. O ponto $x = -1$, $v = 0$ é ponto de sela.

(e) Para resolver esta alínea não é preciso ter resolvido nenhuma das alíneas anteriores. Substituindo $x_0 = 1$ e $\dot{x}_0 = 1$ na equação do sistema, obtemos:

$$\ddot{x}_0 = 4 - 4 - 1 = -1$$

assim:

$$x_1 = x_0 + \Delta t\,\dot{x}_0 = 1 + 0.1\times 1 = 1.1$$
$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 + \Delta t\,\ddot{x}_0 = 1 + 0.1\times(-1) = 0.9$$

Perguntas

3. B

4. C

5. C

6. A

7. E

8. B

9. B

10. A

11. B

12. D

13. B

14. B

15. E

16. C

17. C