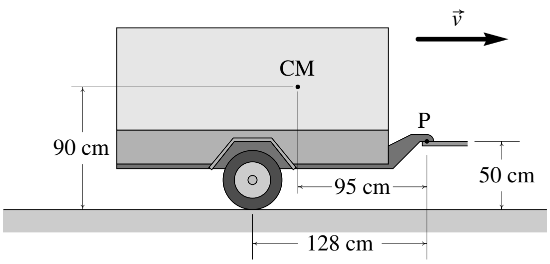
FEUP - MIEIC **FÍSICA I - EIC0010 - 2009/2010**

NOME:______________________________ **LOG-IN FEUP:**__________

Exame final Ponto 1 29 de Junho de 2010

Duração: Duas horas. Com consulta de formulário e utilização de meios de cálculo. Note que os meios de cálculo não pode ser usados como meios de comunicação ou de consulta da matéria! A violação desta regra implica exclusão imediata. Use $g = 9.8$ m/s^2 para a aceleração da gravidade.

1. (4 valores). O reboque apresentado na figura, com massa total de 750 kg, está ligado no ponto P a uma trela que sai da parte posterior de um automóvel. O reboque tem dois pneus idênticos, que neste problema podem ser considerados como um só, com uma única reacção normal e força de atrito desprezável; a resistência do ar também será desprezada. (a) Calcule a reacção normal nos pneus e a força vertical no ponto P, quando a velocidade for constante. (b) Quando a velocidade estiver a mudar, a força em P terá uma componente horizontal, para além da componente vertical; escreva as equações que teria que resolver para determinar, em função da aceleração a, o valor da reacção normal nos pneus e ambas as componentes da força em P (não se pretende que resolva estas equações; apenas que as escreva).



2. (4 valores). As equações de evolução de um sistema dinâmico são:

$$\dot{x} = y^2 + 3\,y - 10 \qquad \dot{y} = x\,y + x + 12$$

(a) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema. (b) Determine a matriz jacobiana. (c) Calcule os valores próprios da matriz jacobiana em cada ponto de equilíbrio. (d) Diga que tipo de ponto é cada um dos pontos de equilíbrio.

PERGUNTAS. *Cotação:* Respostas certas, 0.8, erradas, -0.2, em branco, 0. Cada pergunta tem uma única resposta. Serão avaliadas apenas as respostas que apareçam na caixa de **Resposta** (e não na folha de exame ou de rascunho).

3. Na lista seguinte, qual pode ser o conjunto limite negativo de uma trajectória no espaço de fase?

(**A**) centro
(**B**) ponto de sela
(**C**) ciclo limite atractivo
(**D**) nó atractivo
(**E**) foco atractivo

Resposta: ☐

4. Qual das seguintes é uma característica dos sistemas caóticos?

(**A**) Não é possível prever a trajectória exacta do sistema.
(**B**) Têm 3 ou mais pontos de equilíbrio.
(**C**) O sistema não é autónomo
(**D**) Pequenas variações nas condições iniciais produzem soluções muito diferentes.
(**E**) As equações do sistema são aleatórias.

Resposta: ☐

5. Uma partícula desloca-se ao longo do eixo dos x de forma que a sua velocidade é dada pela expressão:

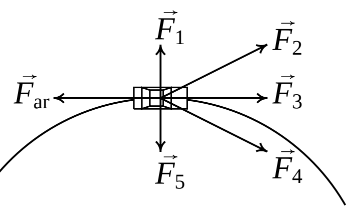
$$v(x) = b\,e^{-n\,x}$$

onde b e n são duas constantes. Qual é a expressão para a aceleração da partícula em função da posição x?

(**A**) $-n\,b\,e^{-n\,x}$ (**C**) $-b\,e^{-(n+1)x}$ (**E**) $n\,b^2\,e^{-n\,x}$
(**B**) $-n\,b^2\,e^{-n\,x}$ (**D**) $-n\,b^2\,e^{-2\,n\,x}$

Resposta: ☐

6. Um automóvel desloca-se numa curva, com velocidade de módulo constante. A figura mostra o automóvel visto de cima e a força de resistência do ar, $\vec{F}_{\text{ar}}$. Qual das cinco forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ ou $\vec{F}_5$ representa melhor a força exercida pelo chão sobre o automóvel?



(**A**) $\vec{F}_5$ (**C**) $\vec{F}_1$ (**E**) $\vec{F}_3$
(**B**) $\vec{F}_2$ (**D**) $\vec{F}_4$

Resposta: ☐

7. Num sistema conservativo, com variáveis de estado (x, v), a velocidade de fase no ponto (8, 4) do espaço de fase tem componentes (4, 3). Indique as componentes da velocidade de fase no ponto (8, -4) do espaço de fase.

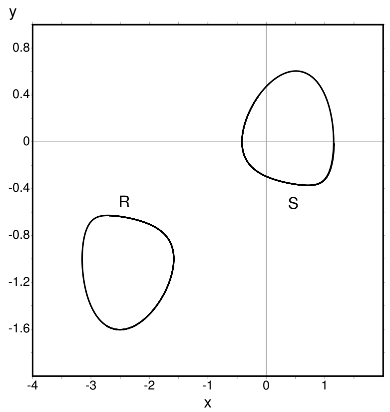
(**A**) (-4, 3) (**C**) (4, -3) (**E**) (4, 3)
(**B**) (3, 4) (**D**) (-4, -3)

Resposta: ☐

8. O sistema com equações de evolução:

$$\dot{x} = -y - y^2 \qquad \dot{y} = 0.5\,x - 0.2\,y + x\,y - 1.2\,y^2$$

tem unicamente dois pontos de equilíbrio: um foco atractivo em (0,0) e um foco repulsivo em (-2, -1). O sistema tem dois ciclos, representados pelas letras R e S na figura seguinte; qual das afirmações é correcta?



(**A**) Nem R nem S podem ser ciclos limite.
(**B**) R é ciclo limite atractivo e S é ciclo limite repulsivo.
(**C**) R e S são ciclos limite atractivos.
(**D**) R é ciclo limite repulsivo e S é ciclo limite atractivo.
(**E**) R e S são ciclos limite repulsivos.

Resposta: ☐

9. Um corpo de 12 kg desloca-se ao longo do eixo dos x. A força resultante sobre o corpo é conservativa, com energia potencial dada pela expressão $5 + 2\,x^2$ (SI). Se o corpo passa pela origem com velocidade $5\,\vec{e}_x$, com que energia cinética chegará ao ponto $x = 2$ m?

(**A**) 355 J (**C**) 1207 J (**E**) 710 J
(**B**) 42 J (**D**) 142 J

Resposta: ☐

10. As equações de um sistema dinâmico com variáveis de estado (x, y) foram transformadas para coordenadas polares (r, θ), obtendo-se as equações:

$$\dot{\theta} = -2 \qquad \dot{r} = 3\,r - r^2$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(**A**) Existe um ciclo limite atractivo em $r = 3$
(**B**) Existe um ciclo limite repulsivo em $r = 2$
(**C**) Existe um ciclo limite atractivo em $r = 0$
(**D**) Existe um ciclo limite atractivo em $r = 2$
(**E**) Existe um ciclo limite repulsivo em $r = 3$

Resposta: ☐

11. As equações de evolução de um sistema linear são:

$$\dot{x} = x + 2\,y \qquad \dot{y} = x + y$$

Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

(**A**) Centro. (**D**) Nó repulsivo.
(**B**) Foco atractivo. (**E**) Ponto de sela.
(**C**) Foco repulsivo.

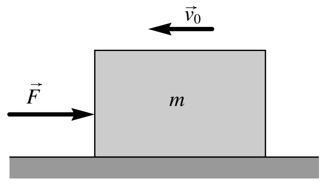
Resposta: ☐

12. A matriz jacobiana de um sistema não linear, num ponto P do espaço de fase (x, y), foi armazenada na variável J, no Maxima. O comando `eigenvectors(J)` produz: `[[[-1,1], [1,1]], [[[1,-1]], [[1,1/3]]]]` que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto P?

(**A**) centro. (**D**) foco atractivo.
(**B**) ponto de sela. (**E**) nó atractivo.
(**C**) foco repulsivo.

Resposta: ☐

13. O bloco na figura, com massa igual a 3 kg, desloca-se para a esquerda, com velocidade inicial $\vec{v}_0$, sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco actua uma força externa $\vec{F}$, horizontal e constante, com módulo igual a 24 N. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é igual a 0.25. Calcule o módulo da aceleração do bloco.



(**A**) 10.45 m/s^2 (**C**) 31.35 m/s^2 (**E**) 8.00 m/s^2
(**B**) 16.65 m/s^2 (**D**) 5.55 m/s^2

Resposta: ☐

14. A força resultante sobre um objecto de massa 2 kg é $\vec{F} = 6\,\vec{e}_x + 4\,t\,\vec{e}_y$ (SI). Se a velocidade do objecto em $t = 0$ for $6\,\vec{e}_x + 7\,\vec{e}_y$ m/s, calcule a velocidade em $t = 2$ s.

(**A**) $18.0\,\vec{e}_x + 15.0\,\vec{e}_y$ (**D**) $6.0\,\vec{e}_x + 4.0\,\vec{e}_y$
(**B**) $12.0\,\vec{e}_x + 4.0\,\vec{e}_y$ (**E**) $12.0\,\vec{e}_x + 11.0\,\vec{e}_y$
(**C**) $12.0\,\vec{e}_x + 11.0\,\vec{e}_y$

Resposta: ☐

15. Se o conjunto limite positivo de uma trajectória A no espaço de fase for um ciclo limite C, qual das afirmações será correcta?

(**A**) A afasta-se de C.
(**B**) Todos os pontos de C também pertencem a A.
(**C**) A aproxima-se de C, sem nunca o tocar.
(**D**) A torna-se exactamente igual a C após algum tempo.
(**E**) A toca o ciclo C num ponto.

Resposta: ☐

16. O comando
`a:rk([f,g],[y,z],[0,1],[x,0,1,0.1])`
do Maxima foi usado para resolver numericamente um sistema de equações. Qual dos comandos seguintes produz uma lista com os valores de `z`?

(**A**) `makelist(a[1][i],i,1,11)`
(**B**) `makelist(a[3][i],i,1,11)`
(**C**) `makelist(a[i][2],i,1,11)`
(**D**) `makelist(a[i][1],i,1,11)`
(**E**) `makelist(a[i][3],i,1,11)`

Resposta: ☐

17. Um homem empurra um bloco de madeira sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco está pousado um livro. Considerando as forças seguintes:

1. Força de contacto entre as mãos do homem e o bloco.
2. Peso do livro.
3. Força de atrito produzida pela superfície horizontal.

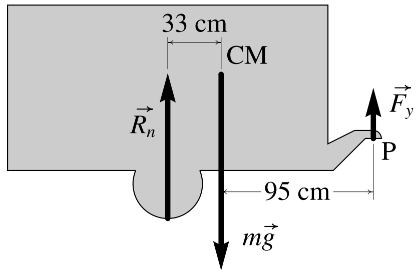
Quais dessas forças actuam sobre o bloco de madeira?

(**A**) 1 e 2 (**C**) 1 e 3 (**E**) 1, 2 e 3
(**B**) 1 (**D**) 2 e 3

Resposta: ☐

Problemas

1. (*a*) Este problema é muito semelhante ao exemplo 4.1 resolvido no livro. O diagrama seguinte mostra as 3 forças externas que actuam sobre o reboque:



As duas equações que permitem calcular os módulos da reacção normal, R_n, e da força em P, F_y, são a soma das forças verticais e a soma dos momentos; ambas devem ser nulas, por não existir nem aceleração linear nem aceleração angular.

$$0.33\,R_n - 0.95\,F_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_n = \frac{95}{33}F_y$$

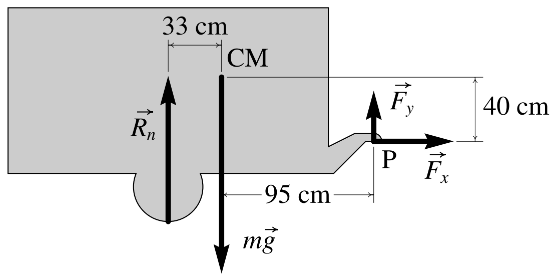
$$R_n + F_y - 750\times 9.8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_y = \frac{750\times 9.8}{1+\frac{95}{33}} = 1895\text{ N} \quad R_n = 5455\text{ N}$$

Repare que os momentos foram calculados em relação ao centro de massa. Outra forma mais simples de resolver o problema é a seguinte: como o sistema está em equilíbrio, podemos calcular momentos em relação aos pontos P e a ponto de contacto do pneu, obtendo duas equações que permitem calcular F_y e R_n directamente:

$$1.28\,R_n - 0.95\times 750\times 9.8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_n = 5455\text{ N}$$

$$1.28\,F_y - 0.33\times 750\times 9.8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_y = 1895\text{ N}$$

(*b*) Este problema é muito semelhante ao exemplo 4.2 resolvido no livro. O diagrama seguinte mostra as 4 forças externas que actuam sobre o reboque:



Como a aceleração é na direcção x (horizontal) e o reboque não roda, a soma das componentes x das forças deve ser igual a $m\,a$, a soma das componentes y (verticais) deve ser nula e a soma dos momentos em relação ao centro de massa deverá ser nula:

$$F_x = 750\,a$$

$$R_n + F_y - 750\times 9.8 = 0$$

$$0.33\,R_n - 0.95\,F_y - 0.4\,F_x = 0$$

Essas 3 equações, com quatro variáveis, permitem calcular R_n, F_x e F_y em função de a.

2. Este problema é muito semelhante aos exemplos 7.1 e 7.2, que foram resolvidos no livro usando o Maxima. Os problemas no fim do capítulo também proponham problemas semelhantes para serem resolvidos com e sem o Maxima. Mostraremos aqui a resolução sem usar o Maxima.

(a) Nos pontos de equilíbrio, as duas componentes da velocidade de fase deverão ser nulas:

$$\begin{aligned} &y^2+3y-10=0 \qquad \Rightarrow \qquad (y+5)(y-2)=0 \\ &xy+x+12=0 \end{aligned}$$

A primeira equação tem duas soluções: $y=-5$ e $y=2$. Substituindo $y=-5$ na segunda equação obtém-se $x=3$ e substituindo $y=2$ obtém-se $x=-4$. Consequentemente, existem unicamente dois pontos de equilíbrio:

$$\mathrm{P}_1=(3,-5) \qquad \mathrm{P}_2=(-4,2)$$

(b) A matriz jacobiana do sistema é:

$$J=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial(y^2+3y-10)}{\partial x} & \dfrac{\partial(y^2+3y-10)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial(xy+x+12)}{\partial x} & \dfrac{\partial(xy+x+12)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2y+3 \\ y+1 & x \end{bmatrix}$$

(c) Substituindo as coordenadas de P_1 na matriz jacobiana obtemos:

$$J=\begin{bmatrix} 0 & -7 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, a soma e o produto dos valores próprios nesse ponto são:

$$\lambda_1+\lambda_2=0+3=3 \qquad \lambda_1\,\lambda_2=0\times 3-(-7)\times(-4)=-28$$

portanto, os valores próprios em P_1 são 7 e -4.
Substituindo as coordenadas de P_2 na matriz jacobiana obtemos:

$$J=\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Assim, a soma e o produto dos valores próprios nesse ponto são:

$$\lambda_1+\lambda_2=0-4=-4 \qquad \lambda_1\,\lambda_2=0\times(-4)-7\times 3=-21$$

portanto, os valores próprios em P_2 são 3 e -7.
(d) Como nos dois pontos de equilíbrio os valores próprios são reais e com sinais opostos, os dois pontos são pontos de sela.

Perguntas

3. B
4. D
5. D
6. D
7. A
8. B
9. D
10. A
11. E
12. B
13. A
14. C ou E
15. C
16. E
17. C