FEUP - MIEIC **FÍSICA I - EIC0010 - 2010/2011**

NOME:____ **LOG-IN FEUP:**__________

Exame final 16 de Junho de 2011

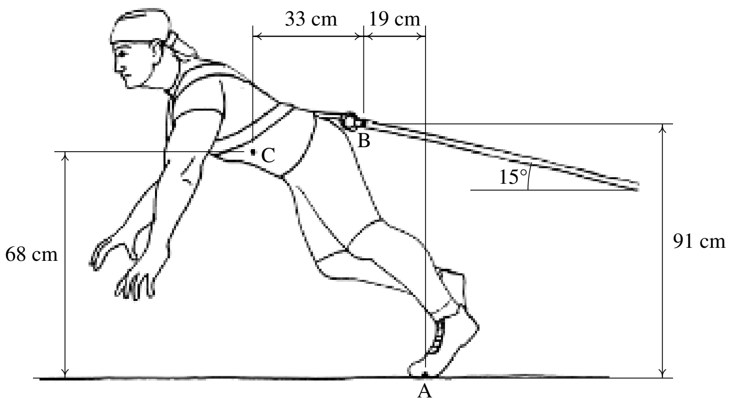
> **Duração**: Duas horas. Com consulta de formulário e utilização de meios de cálculo. Note que os meios de cálculo não podem ser usados como meios de comunicação ou de consulta da matéria! A violação desta regra implica exclusão imediata. Use $g = 9.8$ m/s^2 para a aceleração da gravidade.

1. (4 valores) O sistema dinâmico com equações de evolução: $\dot{x} = -x + 4\,y - y^3 \qquad \dot{y} = -y + 4\,x - x^3$ tem nove pontos de equilíbrio. As coordenadas (x, y) de dois desses pontos são:

$$P_1 = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \qquad P_2 = ((\sqrt{3}-2)\sqrt{2+\sqrt{3}},\ -\sqrt{2+\sqrt{3}})$$

(a) Diga que tipo de pontos de equilíbrio são P_1 e P_2. (b) Escreva as equações de evolução do sistema linear que aproxima o sistema na vizinhança do ponto P_1.

2. (4 valores) Um atleta com massa de 91 kg puxa um camião numa estrada horizontal, com velocidade constante, por meio de uma corda amarrada às suas costas. A figura mostra as posições relativas do centro de gravidade do atleta, C, do ponto de apoio do seu pé com o chão, A, e do ponto de ligação com a corda, B. (a) Calcule o módulo da tensão na corda. (b) Desenhe um diagrama com as forças que julga que poderão estar a atuar no camião.



> **PERGUNTAS**. *Cotação:* Respostas certas, 0.8, erradas, -0.2, em branco, 0. Cada pergunta tem uma única resposta. Serão avaliadas apenas as respostas que apareçam na caixa de **Resposta** (e não na folha de exame ou de rascunho).

3. Um aluno empurra um bloco de massa 900 g, sobre uma mesa horizontal com uma aceleração constante de 1.9 m/s^2. A força que o aluno exerce é horizontal. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa é 0.7, calcule o módulo da força do aluno sobre o bloco.

(**A**) 7.88 N (**C**) 78.84 N (**E**) 15.77 N
(**B**) 19.71 N (**D**) 4.46 N

Resposta: ☐

4. Um campo de futebol tem 70 m de largura e 115 m de comprimento. No início de um jogo, a bola foi colocada no centro do campo e passados 3 minutos foi colocada num canto. Calcule o módulo da velocidade média nesse intervalo.

(**A**) 0.194 m/s (**D**) 0.748 m/s
(**B**) 0.319 m/s (**E**) 0.374 m/s
(**C**) 1.028 m/s

Resposta: ☐

5. O comando
`a:rk([f,g],[y,z],[0,1],[x,0,1.6,0.1])`
do Maxima foi usado para resolver numericamente um sistema de equações. Qual será o resultado do comando `length(a)`?

(**A**) 17 (**C**) 1 (**E**) 16
(**B**) 2 (**D**) 3

Resposta: ☐

6. As equações $\dot{x} = x(2+y)$, $\dot{y} = y(2+x)$ definem um sistema:

(**A**) Linear.
(**B**) Conservativo.
(**C**) De duas espécies com cooperação.
(**D**) De duas espécies com competição.
(**E**) Presa-predador.

Resposta: ☐

7. Uma partícula desloca-se ao longo do eixo dos x com uma aceleração que aumenta em função do tempo: $a = 5\,t$ (unidades SI). No instante $t = 0$, a partícula encontra-se em repouso no ponto $x = 8$ m. Calcule a posição da partícula em $t = 6$ s.

(**A**) 564.0 m (**C**) 94.0 m (**E**) 188.0 m
(**B**) 470.0 m (**D**) 1165.6 m

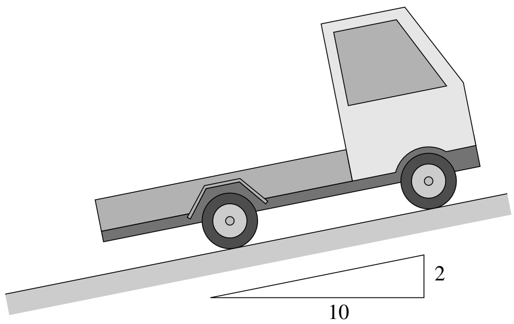
Resposta: ☐

8. O comando
`a:rk([f,g],[y,z],[0,1],[x,0,1,0.1])`
do Maxima foi usado para resolver numericamente um sistema de equações. Qual dos comandos seguintes produz uma lista com os valores de `z`?

(**A**) `makelist(a[3][i],i,1,11)`
(**B**) `makelist(a[i][3],i,1,11)`
(**C**) `makelist(a[i][1],i,1,11)`
(**D**) `makelist(a[i][2],i,1,11)`
(**E**) `makelist(a[1][i],i,1,11)`

Resposta: ☐

9. Um camião com massa total de 1300 kg acelera desde o repouso até uma velocidade de 25 km/h numa distância de 100 m, ao longo de uma rampa com declive constante de 20% (em cada 10 metros na horizontal, a rampa sobe 2 metros). Calcule o trabalho realizado pelas forças de atrito.



(**A**) 218.5 kJ (**C**) -31.3 kJ (**E**) -218.5 kJ
(**B**) 281.2 kJ (**D**) 249.9 kJ

Resposta: ☐

10. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado tem exactamente dois pontos de equilíbrio, P e Q. O ponto P é ponto de sela e o ponto Q é foco repulsivo. Qual das seguintes afirmações sobre o sistema é verdadeira?

(**A**) Pode existir uma órbita homoclínica.
(**B**) O sistema pode ser linear.
(**C**) Podem existir ciclos.
(**D**) Pode existir uma órbita heteroclínica.
(**E**) O sistema pode estar em estado de equilíbrio estável.

Resposta: ☐

11. Um piloto de corridas de aviões, com 105 kg, executa um loop vertical de 900 m de raio, com velocidade constante em módulo. Sabendo que a força exercida no piloto pela base do assento do avião é igual a 2572 N, no ponto mais baixo do loop, calcule a mesma força no ponto mais alto do loop.

(**A**) 2572.0 N (**C**) 257.0 N (**E**) 1028.5 N
(**B**) 1543.0 N (**D**) 514.0 N

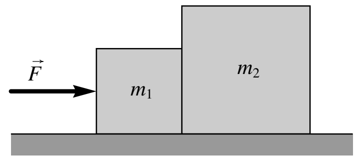
Resposta: ☐

12. Se o ponto de equilíbrio de um sistema linear for um foco atrativo, o que podemos concluir acerca do traço, T, ou o determinante, D, da matriz do sistema?

(**A**) $T < 0$ (**C**) $D < 0$ (**E**) $T > 0$
(**B**) $T = 0$ (**D**) $D = 0$

Resposta: ☐

13. Na figura, a força $\vec{F}$ é horizontal e constante, com módulo igual a 32 N. As massas dos dois blocos são $m_1 = 9$ kg e $m_2 = 63$ kg. Os dois blocos aceleram sobre a superfície horizontal. Calcule o módulo da força que o bloco do lado esquerdo exerce sobre o bloco do lado direito.



(**A**) 0 (**C**) 4 N (**E**) 28 N
(**B**) 24 N (**D**) 32 N

Resposta: ☐

14. De acordo com o critério de Bendixson, qual dos seguintes sistemas dinâmicos não pode ter nenhuma órbita fechada (ciclo, órbita homoclínica ou órbita heteroclínica)?

(**A**) $\dot{x} = 3x^2 + y^2 \quad \dot{y} = x^2 - y^2$
(**B**) $\dot{x} = 3x^3 + y^2 \quad \dot{y} = x^2 y - y$
(**C**) $\dot{x} = 3x + y^2 \quad \dot{y} = x^2 + y^2$
(**D**) $\dot{x} = 3x + y^2 \quad \dot{y} = x^3 y - y$
(**E**) $\dot{x} = 3x^3 + y^2 \quad \dot{y} = y - yx^2$

Resposta: ☐

15. A matriz de um sistema dinâmico linear é:
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$
Se A for a trajectória que passa pelo ponto (0,1) no espaço de fase e B for a trajectória que passa pelo ponto (1,0), podemos afirmar que a origem é:

(**A**) Conjunto limite negativo de A e de B.
(**B**) Conjunto limite positivo e negativo de A.
(**C**) Conjunto limite positivo de A e limite negativo de B.
(**D**) Conjunto limite negativo de A e limite positivo de B.
(**E**) Conjunto limite positivo de A e de B.

Resposta: ☐

16. A força resultante sobre uma partícula que se desloca no eixo dos x é $F = (x + 1)(x - 1)(3 - x)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira, em relação aos pontos de equilíbrio da partícula?

(**A**) $x = 1$ é estável e $x = 3$ é instável.
(**B**) $x = -1$ é estável e $x = 3$ é instável.
(**C**) $x = -1$ é instável e $x = 3$ é estável.
(**D**) $x = -1$ e $x = 1$ são instáveis.
(**E**) $x = 1$ é instável e $x = 3$ é estável.

Resposta: ☐

17. A matriz jacobiana de um sistema dinâmico com variáveis de estado (x, y), é:
$$\begin{bmatrix} y & x - 1 \\ y + 1 & x \end{bmatrix}$$
Sabendo que (0, 0) é ponto de equilíbrio do sistema, determine que tipo de ponto é.

(**A**) ponto de sela (**D**) nó atractivo
(**B**) centro (**E**) foco repulsivo
(**C**) nó repulsivo

Resposta: ☐

FEUP - MIEIC | **FÍSICA 1 - EIC0010 - 2010/2011**

Exame | **Resolução**

16 de Junho de 2011 | Jaime Villate

Problemas

1. (*a*) A matriz jacobiana do sistema é:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(-x+4y-y^3)}{\partial x} & \dfrac{\partial(-x+4y-y^3)}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial(-y+4x-x^3)}{\partial x} & \dfrac{\partial(-y+4x-x^3)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4-3y^2 \\ 4-3x^2 & -1 \end{bmatrix}$$

Substituindo as coordenadas de P_1 na matriz jacobiana obtemos:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & -11 \\ -11 & -1 \end{bmatrix}$$

O determinante é $1-121=-120$ e, por ser negativo, conclui-se que o ponto P_1 é ponto de sela.

Substituindo as coordenadas de P_2 na matriz jacobiana obtemos:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2-3\sqrt{3} \\ -2+3\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, a equação caraterística nesse ponto é:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \pm \sqrt{1-24}$$

portanto, os valores próprios em P_2 são números complexos com parte real negativa. O ponto P_2 é um foco atrativo.

(*b*) Para deslocar a origem para o ponto de equilíbrio P_1, introduzimos duas novas coordenadas:

$$u = x + \sqrt{5} \qquad v = y - \sqrt{5}$$

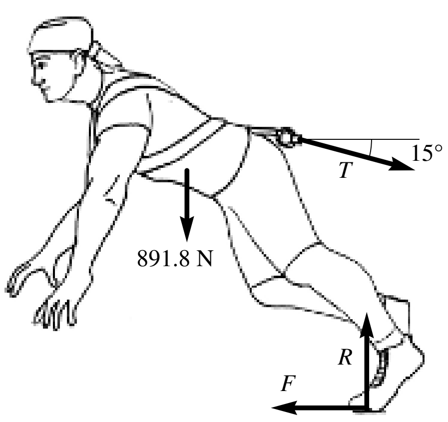
em função dessas coordenadas, o sistema pode ser aproximado para um sistema linear se os valores de u e v estiverem próximos de zero. A matriz desse sistema será a matriz jacobiana no ponto P_1 que já foi calculada na alínea anterior; assim, o sistema linear é:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -11 \\ -11 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

escritas em forma explícita, as duas equações de evolução são:

$$\dot{u} = -u - 11\,v \qquad \dot{v} = -11\,u - v$$

2. (*a*) As forças externas sobre o atleta são o seu peso, de 891.8 N, a tensão na corda, $\vec{T}$, a reação normal do chão; $\vec{R}$, e a força de atrito estático no chão, $\vec{F}$;



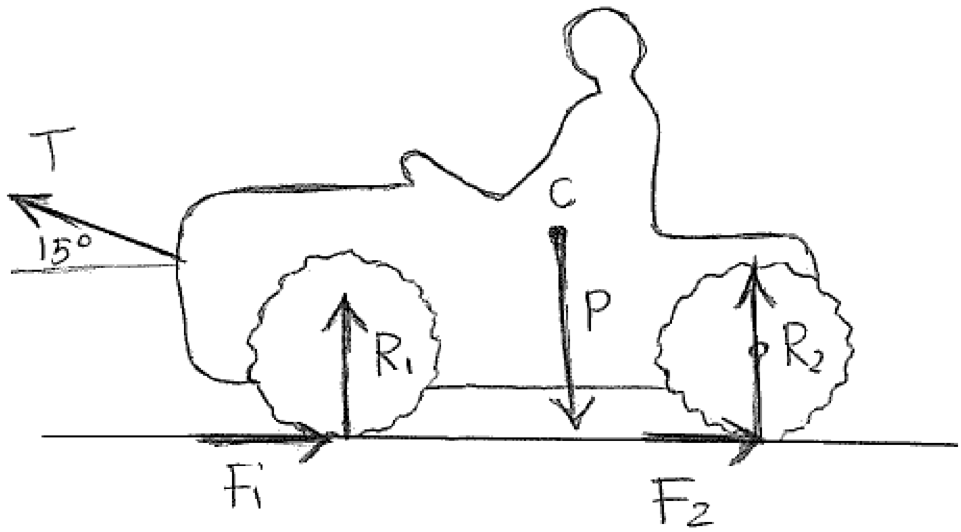
A soma dos momentos em relação a qualquer ponto deverá ser nula. Se usarmos como referência o ponto A, as forças $\vec{R}$ e $\vec{F}$ não produzirão nenhum momento, e a soma dos momentos em relação a A será:

$$0.52 \times 891.8 + 0.19\,T\sin(15^\circ) - 0.91\,T\cos(15^\circ) = 0$$

e, portanto, a tensão na corda é:

$$T = \frac{0.52 \times 891.8}{0.91\cos(15°) - 0.19\,T\sin(15°)} = 559\ \text{N}$$

(b) As forças sobre o camião são a tensão na corda, o peso total do camião e da sua carga e as reações normais e forças de atrito nos pneus. A direção e sentido dessas forças está indicado no diagrama seguinte:



O atrito é estático e aponta na direção oposta ao movimento, porque nenhuma das rodas tem tração. A força da resistência do ar for desprezada, porque a velocidade deverá ser muito baixa, mas se fosse considerada teria a mesma direção e sentido das forças de atrito.

Perguntas

3. A
4. E
5. A
6. C
7. E
8. B
9. B
10. A
11. D
12. A
13. E
14. E
15. E
16. E
17. B