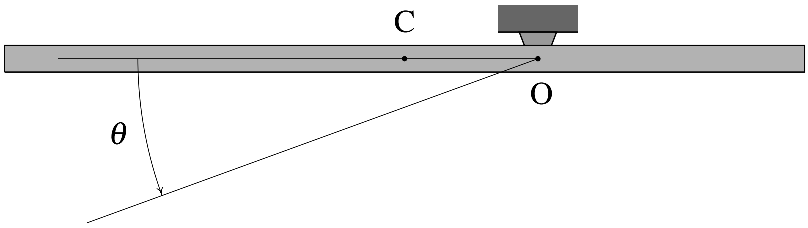
Prova com consulta de formulário e uso de computador. Duração 2 horas.

Nome do estudante: ______________________________

Pode consultar unicamente um formulário (uma folha A4) e utilizar calculadora ou PC. Note que os meios de cálculo não podem ser usados como meios de comunicação ou de consulta da matéria! A violação desta regra implica exclusão imediata. Use $g = 9.8$ m/s^2 para a aceleração da gravidade.

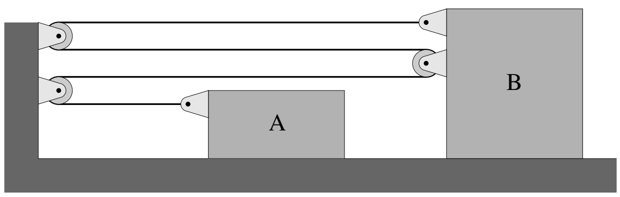
1. (4 valores) Uma partícula desloca-se no plano xy. A componente y da posição é dada pela expressão $y = 4 - 3\,t^2$ (unidades SI), em que t é o tempo, e a componente x da velocidade verifica a expressão $v_x = 3 - 1.2\,x$ (unidades SI). Sabendo que no instante $t = 0$ a componente x da posição da partícula é igual a zero, calcule o valor de t e os vetores velocidade e aceleração quando a partícula passe pelo eixo dos x (isto é, quando $y = 0$).

2. (4 valores) A barra uniforme na figura tem massa de 40 gramas e comprimento igual a 50 cm. O ponto C é o seu centro de massa (no ponto central da barra) e no ponto O há um prego fixo a um suporte, que permite que a barra rode livremente. (a) Sabendo que o momento de inércia de uma barra uniforme e comprida, em relação ao centro de massa, é dado pela expressão $m\,L^2/12$, em que m é a massa e L o comprimento, e que a distância entre os pontos O e C é de 8 cm, calcule o momento de inércia da barra em relação ao prego em O. (b) O movimento da barra pode ser descrito com um único grau de liberdade, o ângulo θ medido a partir da posição horizontal e no sentido indicado na figura; escreva as equações de evolução da barra, ignorando o atrito no prego e qualquer outra força dissipativa (se não resolveu a alínea a, faça de conta que o momento de inércia é 1). (c) Diga, justificando, quais são os pontos de equilíbrio da barra e que tipo de pontos são.



PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. Se o bloco B se deslocar para a direita com velocidade v, qual será a velocidade do bloco A?



(A) $v/2$ **(B)** $2\,v$ **(C)** $3\,v$ **(D)** $v/3$ **(E)** v

Resposta: ☐

4. Em 1610 Galileu Galilei descobriu 4 luas à volta de Júpiter. Uma delas, Calisto, tem um movimento orbital aproximadamente circular uniforme, com raio de 1882.7×10^3 km e período de 16.69 dias. Calcule o módulo da aceleração de Calisto.

(A) 0.111 m/s^2
(B) 0.0357 m/s^2
(C) 0.282 m/s^2
(D) 0.712 m/s^2
(E) 0.983 m/s^2

Resposta: ☐

5. A matriz de um sistema dinâmico linear é:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Se A for a trajetória que passa pelo ponto (0,1) no espaço de fase e B for a trajetória que passa pelo ponto (1,0), podemos afirmar que a origem é:

(A) Conjunto limite negativo de A e de B.
(B) Conjunto limite positivo e negativo de A.
(C) Conjunto limite negativo de A e limite positivo de B.
(D) Conjunto limite positivo de A e de B.
(E) Conjunto limite positivo de A e limite negativo de B.

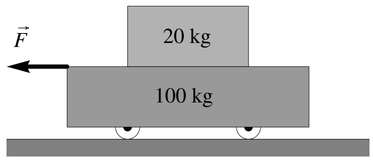
Resposta: ☐

6. Um camião com massa total de 1400 kg acelera desde o repouso até uma velocidade de 30 km/h numa distância de 140 m, ao longo de uma rampa com declive constante de 20% (em cada 10 metros na horizontal, a rampa sobe 2 metros). Calcule o trabalho realizado pelas forças de atrito.

(A) -328.1 kJ **(B)** 425.3 kJ **(C)** -48.6 kJ **(D)** 376.7 kJ **(E)** 328.1 kJ

Resposta: ☐

7. A força $\vec{F}$, com módulo de 54 N, faz acelerar os dois blocos na figura, sobre uma mesa horizontal, sem que o bloco de cima deslize em relação ao outro bloco. As forças de atrito nas rodas podem ser desprezadas. Calcule o módulo da força de atrito entre os dois blocos.



(A) 7 N **(C)** 8 N **(E)** 5 N
(B) 9 N **(D)** 6 N

Resposta: ☐

8. Um piloto de corridas de aviões, com 80 kg, executa um loop vertical de 600 m de raio, com velocidade constante em módulo. Sabendo que a força exercida no piloto pela base do assento do avião é igual a 1960 N, no ponto mais baixo do loop, calcule a mesma força no ponto mais alto do loop.

(A) 196 N **(C)** 392 N **(E)** 784 N
(B) 1960 N **(D)** 1176 N

Resposta: ☐

9. A força resultante sobre uma partícula que se desloca no eixo dos x é $F = (x+1)(x-1)(3-x)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira, em relação aos pontos de equilíbrio da partícula?

(A) $x = 1$ é estável e $x = 3$ é instável.
(B) $x = -1$ e $x = 1$ são instáveis.
(C) $x = 1$ é instável e $x = 3$ é estável.
(D) $x = -1$ é instável e $x = 3$ é estável.
(E) $x = -1$ é estável e $x = 3$ é instável.

Resposta: ☐

10. Se o ponto de equilíbrio de um sistema linear for um ponto de sela, o que podemos concluir acerca do traço, T, ou o determinante, D, da matriz do sistema?

(A) $T > 0$ **(C)** $D = 0$ **(E)** $D < 0$
(B) $T = 0$ **(D)** $T < 0$

Resposta: ☐

11. Qual das matrizes na lista é a matriz jacobiana do sistema dinâmico equivalente à seguinte equação diferencial?
$\ddot{x}\,x - 2\,x\,\dot{x} + 2\,x = 0$

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ **(D)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ y - 4\,x & x \end{bmatrix}$ **(E)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4\,y - 2 & 4\,x \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Resposta: ☐

12. O espaço de fase de uma partícula que se desloca no plano xy é $(x,\ y,\ v_x,\ v_y)$ e o vetor aceleração é dado pela expressão $\vec{a} = 4\,\vec{r} - 7\,\vec{v}$, onde $\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y$ é o vetor posição e $\vec{v} = v_x\,\vec{e}_x + v_y\,\vec{e}_y$ é o vetor velocidade. Calcule a terceira linha da matriz jacobiana.

(A) (4, -7, 4, -7) **(D)** (4, 0, -7, 0)
(B) (-7, -7, 4, 4) **(E)** (0, 4, 0, -7)
(C) (4, 4, -7, -7)

Resposta: ☐

13. As equações de um sistema dinâmico com variáveis de estado $(x,\ y)$ foram transformadas para coordenadas polares $(r,\ \theta)$, obtendo-se as equações: $\dot{\theta} = -2 \quad \dot{r} = 3\,r - r^2$
Assim, conclui-se que o sistema tem um ciclo limite:

(A) atrativo com $r = 0$ **(D)** repulsivo com $r = 3$
(B) atrativo com $r = 2$ **(E)** repulsivo com $r = 2$
(C) atrativo com $r = 3$

Resposta: ☐

14. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, qual dos seguintes sistemas poderá ser um sistema de duas espécies, com cooperação?

(A) $\dot{x} = y^2 - x\,y \qquad \dot{y} = x^2 - x\,y$
(B) $\dot{x} = x^2 + x\,y \qquad \dot{y} = y^2 + x\,y$
(C) $\dot{x} = y^2 - x\,y \qquad \dot{y} = x^2 + x\,y$
(D) $\dot{x} = y^2 + x\,y \qquad \dot{y} = x^2 + x\,y$
(E) $\dot{x} = x\,y - x^2 \qquad \dot{y} = y^2 - x^2$

Resposta: ☐

15. A posição de um objeto ao longo de um percurso, em função do tempo, é dada por $s = 126\,t - 9\,t^2$ (SI). Calcule a distância percorrida pelo objeto entre $t = 0$ e $t = 10.5$ s.

(A) 551.25 m **(C)** 110.25 m **(E)** 113.25 m
(B) 441 m **(D)** 771.75 m

Resposta: ☐

16. Um condutor viajou a 70 km/h durante 45 minutos, parou durante 15 minutos e continuou a 80 km/h durante meia hora. Calcule a velocidade média do percurso total.

(A) 74.0 km/h **(C)** 61.7 km/h **(E)** 80 km/h
(B) 75 km/h **(D)** 70 km/h

Resposta: ☐

17. De acordo com o critério de Bendixson, qual dos seguintes sistemas dinâmicos não pode ter nenhuma órbita fechada (ciclo, órbita homoclínica ou órbita heteroclínica)?

(A) $\dot{x} = 3\,x^2 + y^2 \quad \dot{y} = x^2 - y^2$
(B) $\dot{x} = 3\,x^3 + y^2 \quad \dot{y} = x^2 y - y$
(C) $\dot{x} = 3\,x + y^2 \quad \dot{y} = x^2 + y^2$
(D) $\dot{x} = 3\,x + y^2 \quad \dot{y} = x^3 y - y$
(E) $\dot{x} = 3\,x^3 + y^2 \quad \dot{y} = y - y\,x^2$

Resposta: ☐

Resolução do Exame do dia 11 de junho de 2012

Problemas

1. Para obter o valor de t_1, em que a partícula passa pelo eixo dos x, basta igualar a expressão de y a zero e resolver:

$$4 - 3\,t_1^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad t_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(a raiz negativa não interessa, porque estamos interessados em $t > 0$). A seguir, podemos derivar as duas expressões dadas para obter mais informação sobre o movimento:

$$v_y = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = -6\,t \qquad\qquad a_y = \frac{\mathrm{d}\,v_y}{\mathrm{d}\,t} = -6$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}\,v_x}{\mathrm{d}\,t} = -1.2\,\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -1.2\,v_x = 1.44\,x - 3.6$$

Assim, para poder calcular os valores numéricos dos vetores velocidade e aceleração será preciso também calcular o valor de x_1 no instante $t_1 = 2\sqrt{3}/3$. Isso deverá ser feito por resolução de uma equação diferencial e será preciso saber valores iniciais; podemos ver que no instante inicial $t_0 = 0$, como $x_0 = 0$, então $v_{x0} = 3$. Mostraremos 3 métodos diferentes de obter os valores de v_{x1} e a_{x1}.

Método 1. Integração da expressão para v_x.

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 3 - 1.2\,x \;\Longrightarrow\; \int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}\,x}{3 - 1.2\,x} = \int_0^{2\sqrt{3}/3} \mathrm{d}\,t \;\Longrightarrow\; -\frac{1}{1.2}\ln\left(\frac{3 - 1.2\,x_1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \;\Longrightarrow\; x_1 = 2.5\left(1 - \mathrm{e}^{-0.8\sqrt{3}}\right)$$

e, substituindo nas expressões para v_x e a_x, temos:

$$v_{x_1} = 3\,\mathrm{e}^{-0.8\sqrt{3}} \qquad\qquad a_{x1} = -3.6\,\mathrm{e}^{-0.8\sqrt{3}}$$

Método 2. Integração da expressão para a_x.

$$\frac{\mathrm{d}\,v_x}{\mathrm{d}\,t} = -1.2\,v_x \;\Longrightarrow\; \int_3^{v_{x1}} \frac{\mathrm{d}\,v_x}{v_x} = -1.2\int_0^{2\sqrt{3}/3} \mathrm{d}\,t \;\Longrightarrow\; \ln\left(\frac{v_{x1}}{3}\right) = -0.8\sqrt{3} \;\Longrightarrow\; v_{x1} = 3\,\mathrm{e}^{-0.8\sqrt{3}} \quad a_{x1} = -3.6\,\mathrm{e}^{-0.8\sqrt{3}}$$

Método 3. Integração numérica. Usando três algarismos significativos, $t_1 = 2\sqrt{3}/3 \approx 1.15$; assim, usaremos os seguintes comandos do Maxima:

```
(%i1) fpprintprec: 3\$

(%i2) last (rk ([vx,-1.2*vx],[x,vx],[0,3],[t,0,1.155,0.01]));
(%o2)                  [1.15, 1.87, .755]
(%i3) -1.2*%[3];
(%o3)                         - .906
```

Finalmente, podemos escrever a resposta:

$$t_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.15(\mathrm{s})$$

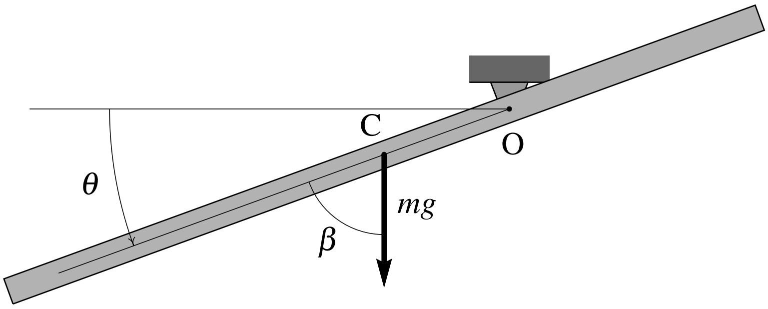
$$\vec{v}_1 = 3\,\mathrm{e}^{-0.8\sqrt{3}}\,\vec{e}_x - 4\sqrt{3}\,\vec{e}_y \approx (0.750\,\vec{e}_x - 6.93\,\vec{e}_y)\,\mathrm{m/s}$$

$$\vec{a}_1 = -3.6\,\mathrm{e}^{-0.8\sqrt{3}}\,\vec{e}_x - 6\,\vec{e}_y \approx (-0.901\,\vec{e}_x - 6\,\vec{e}_y)\,\mathrm{m/s^2}$$

2. (a) O momento de inércia em relação a O calcula-se usando o **teorema dos eixos paralelos**. Se d for a distância CO:

$$I_\mathrm{O} = \frac{m\,L^2}{12} + m\,d^2 = \frac{0.04 \times 0.5^2}{12} + 0.04 \times 0.08^2 = 1.089 \times 10^{-3}\ \left(\mathrm{kg\cdot m^2}\right)$$

(b) **Método 1**. (Tal como no exemplo 2 da aula teórica número 12) As variáveis de estado serão o ângulo θ e a velocidade angular ω. As equações de evolução são as expressões das derivadas dessas duas variáveis, em função das próprias variáveis de estado. A derivada $\dot\omega$ é a aceleração angular; para calculá-la, em função de θ, começamos por desenhar o diagrama de corpo livre para um ângulo qualquer:



As forças que atuam no ponto O não foram representadas, porque trata-se de um movimento de rotação com eixo fixo e as forças no eixo não produzem momento em relação ao eixo. O momento resultante, em relação a O, será apenas o momento do peso e, portanto:

$$m\,g\,d\,\sin\beta = I_\mathrm{O}\,\alpha$$

Como o ângulo β é igual a $\pi/2-\theta$, então $\sin\beta = \cos\theta$. Substituindo os valores conhecidos obtemos:

$$\alpha = \frac{0.04\times 9.8\times 0.08}{1.089\times 10^{-3}}\cos\theta = 28.79\,\cos\theta$$

Assim, as equações de evolução são as seguintes:

$$\dot\theta = \omega \qquad\qquad \dot\omega = 28.79\,\cos\theta$$

Método 2. As expressões da energia cinética e potencial, em função da coordenada generalizada θ e da velocidade generalizada $\dot\theta=\omega$ são:

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}I_\mathrm{O}\,\omega^2 \qquad\qquad U = -m\,g\,d\sin\theta$$

como o sistema é conservativo, a equação de Lagrange é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial\omega}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial\theta} + \frac{\partial U}{\partial\theta} = 0$$

que conduz à equação

$$I_\mathrm{O}\,\dot\omega - m\,g\,d\cos\theta = 0$$

ou seja, as equações de evolução são

$$\dot\theta = \omega \qquad\qquad \dot\omega = \frac{m\,g\,d}{I_\mathrm{O}}\cos\theta = 28.79\,\cos\theta$$

(c) **Método 1**. Como se trata de um sistema conservativo, os pontos de equilíbrio terão todos $\omega=0$ e θ corresponderá aos pontos em que a energia potencial for máxima ou mínima. Como vimos na alínea anterior, a energia potencial é $-m\,g\,d\sin\theta$. Restringindo o ângulo θ ao intervalo $[0,\ 2\,\pi[$, a função $-\sin\theta$ tem um mínimo local (centro) em $\theta=\pi/2$ e um máximo local (ponto de sela) em $\theta=3\pi/2$.

Método 2. Os pontos de equilíbrio são os pontos do espaço de fase em que as derivadas das duas variáveis de estado são nulas: $\omega=0$ e $28.79\cos\theta=0$. Restringindo o ângulo θ ao intervalo $[0,\ 2\,\pi[$, temos dois pontos de equilíbrio: $(\theta,\omega)=(\pi/2,0)$ e $(\theta,\omega)=(3\,\pi/2,0)$.

A matriz jacobiana do sistema é:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\omega}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\omega}{\partial\omega} \\[2ex] \dfrac{\partial\,(28.79\,\cos\theta)}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\,(28.79\,\cos\theta)}{\partial\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -28.79\,\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

e a equação dos valores próprios é:

$$\lambda^2 + 28.79\,\sin\theta = 0 \qquad\qquad \lambda = \pm\sqrt{-28.79\,\sin\theta}$$

No ponto em $\theta=\pi/2$, o seno é igual a 1 e, portanto, os valores próprios são imaginários e o ponto é um centro. No ponto $\theta=3\,\pi/2$, o seno é igual a -1, os valores próprios são reais com sinais opostos e trata-se de um ponto de sela.

Método 3. Como não era pedida nenhuma demonstração matemática, basta justificar que a barra pode ser mantida em repouso, durante muito tempo, nas posições $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$. No primeiro caso, é um equilíbrio estável porque a barra terá uma tendência a regressar para esse ponto; no segundo caso é um ponto de equilíbrio instável, porque um pequeno impulso faz descer a barra, afastando-se do ponto de equilíbrio.

Perguntas

3. C	**6.** B	**9.** C	**12.** D	**15.** A
4. B	**7.** B	**10.** E	**13.** C	**16.** C
5. D	**8.** C	**11.** C	**14.** B	**17.** E