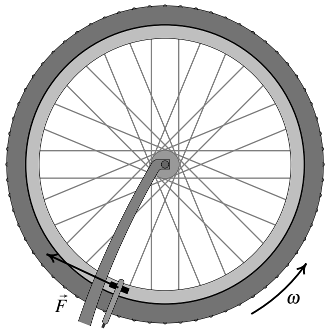
Prova com consulta de formulário e uso de computador. Duração 2 horas.

Nome do estudante: ____________________

Pode consultar unicamente um formulário (uma folha A4) e utilizar calculadora ou PC. Note que os meios de cálculo não podem ser usados como meios de comunicação ou de consulta da matéria! A violação desta regra implica exclusão imediata. Use $g = 9.8$ m/s^2 para a aceleração da gravidade.

1. **(4 valores)** Para testar os travões, uma bicicleta foi colocada com as rodas para o ar e a roda foi posta a rodar livremente, como mostra a figura. Foi medido o tempo que a roda demorou a dar 10 voltas, obtendo-se o valor de 8.2 s (admita que nesse intervalo a velocidade angular ω permanece constante). Imediatamente a seguir, aplicaram-se os travões e a roda demorou 2.9 s até parar completamente. A figura mostra a força de atrito $\vec{F}$ entre os calços e o aro, que é tangente ao aro e aplicada a uma distância de 27.1 cm do eixo da roda. (a) Admitindo que a força $\vec{F}$ é constante, a aceleração angular que ela produz também será constante; calcule essa aceleração angular. (b) Calcule o número de voltas efetuadas pela roda durante o tempo em que os travões atuaram. (c) Sabendo que o momento de inércia da roda, em relação ao seu centro, é igual a 0.135 kg·m^2, calcule o módulo da força $\vec{F}$.



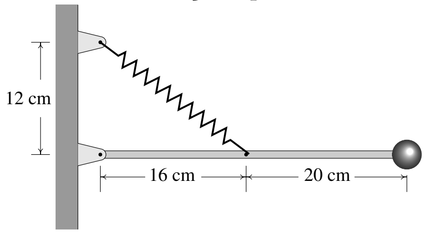
2. **(4 valores)** Um objeto de massa $m = 0.3$ kg desloca-se no eixo dos x. Se x e v representam a posição e velocidade do centro de massa, a expressão para a energia mecânica total do objeto é: $H = \frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$ (unidades SI)

As equações de evolução podem ser obtidas aplicando as equações de Hamilton: $\dot{x} = \frac{1}{m}\frac{\partial H}{\partial v}$ $\quad \dot{v} = -\frac{1}{m}\frac{\partial H}{\partial x}$

(a) Escreva as equações de evolução do sistema. (b) Encontre os pontos de equilíbrio no espaço de fase. (c) Calcule a matriz jacobiana do sistema. (d) Demonstre que este sistema tem ciclos e calcule a frequência de oscilação f desses ciclos.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. Na figura, a mola elástica é usada para manter a barra na posição horizontal. Sabendo que a constante elástica da mola é igual a 600 N/m e o seu comprimento, quando não está comprida nem esticada, é 15 cm, calcule a energia elástica da mola na situação apresentada na figura.



(A) 270 mJ **(B)** 480 mJ **(C)** 1080 mJ **(D)** 1470 mJ **(E)** 750 mJ

Resposta: ☐

4. Qual das seguintes equações podera ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

(A) $\dot{y} = 6\,y - y^2$
(B) $\dot{y} = 2\,y^2 - 3\,y$
(C) $\dot{y} = x + x\,y^2$
(D) $\dot{y} = 2\,y - 5\,y^2$
(E) $\dot{y} = 6\,y + x\,y$

Resposta: ☐

5. Sabendo que a distância média entre a Terra e a Lua é 3.84×10^8 m, e que a Lua demora 27.3 dias a completar a sua órbita à volta da Terra, calcule o módulo da aceleração da Lua, em m/s^2, admitindo que a sua órbita seja circular.

(A) 1.38×10^{-10}
(B) 1.57
(C) 2.03×10^7
(D) 3.53×10^4
(E) 2.72×10^{-3}

Resposta: ☐

6. Se o ponto de equilíbrio de um sistema linear é um foco atrativo, qual das afirmações seguintes, acerca da matriz do sistema, é verdadeira?

(A) o determinante é nulo
(B) o traço é negativo
(C) o determinante é negativo
(D) o traço é positivo
(E) o traço é nulo.

Resposta: ☐

7. A velocidade de um avião em relação ao ar é 800 km/h, na direção norte. Nesse instante, a velocidade do vento é de 70 km/h, em direção este. Calcule a velocidade do avião em relação à terra.

(**A**) 716 km/h (**C**) 730 km/h (**E**) 870 km/h
(**B**) 884 km/h (**D**) 803 km/h

Resposta: ☐

8. Um objecto desloca-se ao longo do eixo dos x. Em qualquer ponto com coordenada x, a aceleração do objecto é dada pela expressão $a = 4\,x^3$ (unidades SI). Se o objecto parte do repouso no ponto $x = 1$ m, com que velocidade chegará ao ponto $x = 2$ m?

(**A**) 4.15 m/s (**C**) 2.83 m/s (**E**) 5.48 m/s
(**B**) 8.00 m/s (**D**) 6.74 m/s

Resposta: ☐

9. Um bloco de massa 5 kg desce deslizando sobre a superfície de um plano inclinado com base $x = 2$ m e altura $y = 7$ m. Calcule o módulo da reação normal do plano sobre o bloco.

(**A**) 94.23 N (**C**) 6.73 N (**E**) 13.46 N
(**B**) 49.0 N (**D**) 7.0 N

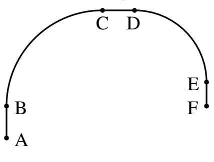
Resposta: ☐

10. O vetor velocidade de um objeto, em função do tempo, é: $\vec{v} = 3\,\mathrm{e}^{-t}\,\vec{e}_x + 4\,t^2\,\vec{e}_y$ (unidades SI). Calcule o vetor deslocamento entre $t = 1$ e $t = 2$.

(**A**) $2.6\,\vec{e}_x + 11.0\,\vec{e}_y$ (**D**) $-0.41\,\vec{e}_x + 11.0\,\vec{e}_y$
(**B**) $-1.1\,\vec{e}_x + 1.3\,\vec{e}_y$ (**E**) $1.9\,\vec{e}_x + 1.3\,\vec{e}_y$
(**C**) $0.7\,\vec{e}_x + 9.3\,\vec{e}_y$

Resposta: ☐

11. Uma partícula segue a trajetória que mostra a figura. A partícula parte do repouso em A, acelerando com aceleração constante até o ponto B; desde B até E mantém a sua velocidade constante e a partir de E começa a abrandar, com aceleração constante, até parar no ponto F. A distância AB é 20 cm, CD é 20 cm, EF é 15 cm; o raio do arco BC é 60 cm e o raio do arco DE é 45 cm. Em qual dos segmentos na lista o módulo da aceleração foi maior?



(**A**) EF (**C**) BC (**E**) AB
(**B**) DE (**D**) CD

Resposta: ☐

12. A velocidade de uma partícula que se desloca em uma dimensão é dada pela expressão $2/s$ onde s é a posição. Encontre a expressão para a aceleração tangencial em função de s.

(**A**) $-4/s^3$ (**D**) $2\log s$
(**B**) $-2/s^2$ (**E**) $2/(s\,t)$
(**C**) $2/s^2$

Resposta: ☐

13. O comando

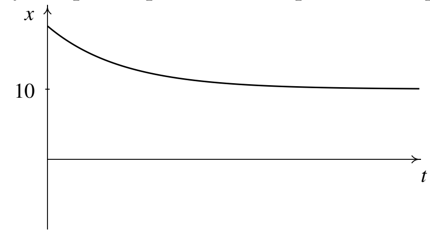
```
a:rk([-x,y],[y,x],[0,1],[t,1,3,0.1])
```

do Maxima foi usado para resolver numericamente um sistema dinâmico. Qual dos comandos na lista poderá ser usado para obter o valor da variável y no instante $t = 1.2$?

(**A**) `a[2][2]` (**C**) `a[1][2]` (**E**) `a[3][1]`
(**B**) `a[3][2]` (**D**) `a[2][3]`

Resposta: ☐

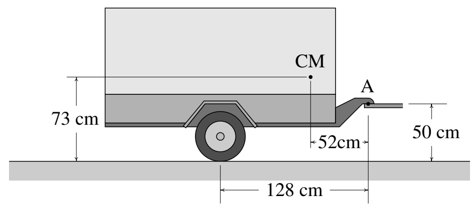
14. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado x e y tem um ponto de equilíbrio no ponto $x = 10$, $y = 5$. O gráfico mostra a evolução da variável x em função de tempo. Que tipo de ponto é esse ponto de equilíbrio?



(**A**) nó atrativo (**D**) centro
(**B**) foco repulsivo (**E**) nó repulsivo
(**C**) foco atrativo

Resposta: ☐

15. O reboque na figura, com pesso total P, está ligado no ponto A por uma trela que sai da parte posterior de um automóvel. Se o reboque estiver em repouso, e se F for o módulo da força de contacto entre o carro e o reboque, no ponto A, qual das seguintes afirmações é verdadeira?



(**A**) $P/2 < F < P$ (**D**) $0 < F < P/2$
(**B**) $F = 0$ (**E**) $F = P/2$
(**C**) $F = P$

Resposta: ☐

16. Na lista seguinte, qual pode ser o conjunto limite negativo de uma trajectória no espaço de fase?

(**A**) ciclo limite atrativo (**D**) ponto de sela
(**B**) centro (**E**) nó atrativo
(**C**) foco atrativo

Resposta: ☐

17. Num sistema que se desloca no eixo dos x, a força resultante é $x^2 + x - 2$. Na lista seguinte, qual dos valores corresponde à posição x dum ponto de equilíbrio estável?

(**A**) -2 (**C**) 3 (**E**) 2
(**B**) 1 (**D**) -1

Resposta: ☐

Resolução do Exame do dia 2 de julho de 2012

Problemas

1. (*a*) A velocidade angular inicial, no instante em que se aplicam os travões, obtém-se dividindo o ângulo correspondente a dez voltas pelo tempo que a roda demorou a dar essas dez voltas:

$$\omega_0 = \frac{10 \times 2\pi}{8.2} = 7.662\ \text{s}^{-1}$$

e a velocidade angular final é 0. Como a aceleração angular α é constante,

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0 - 7.662}{2.9} = -2.642\ \text{s}^{-2}$$

(*b*) O ângulo percorrido pela roda durante os 2.9 segundos da travagem determina-se integrando uma das equações de movimento:

$$\alpha = \omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} \quad\Longrightarrow\quad \int_0^\theta -2.642\,\mathrm{d}\theta = \int_{7.662}^0 \omega\,\mathrm{d}\omega \quad\Longrightarrow\quad -2.642\,\theta = -\frac{7.662^2}{2} \quad\Longrightarrow\quad \theta = 11.11$$

que corresponde a $11.11/(2\pi) = 1.8$ voltas.

(*c*) O momento produzido pela força $\vec{F}$ é igual ao momento de inércia da roda, vezes a sua aceleração angular:

$$-F\,r = I_0\,\alpha \quad\Longrightarrow\quad -0.271\,F = -0.135 \times 2.64 \quad\Longrightarrow\quad F = 1.32\ \text{N}$$

2. (*a*)

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{m\,v}{m} = v$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{m}\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{m}\left(-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{20}{3\,x^2} - \frac{5}{3}$$

(*b*) Os pontos de equilíbrio são as soluções do sistema:

$$v = 0$$

$$\frac{20}{3\,x^2} - \frac{5}{3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad x^2 = 4 \quad\Longrightarrow\quad x = \pm 2$$

ou seja, há dois pontos de equilíbrio: $(x, v) = (2, 0)$ e $(x, v) = (-2, 0)$.

(*c*) A matriz jacobiana do sistema é:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial v} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{20}{3\,x^2} - \dfrac{5}{3}\right) & \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{20}{3\,x^2} - \dfrac{5}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{40}{3\,x^3} & 0 \end{bmatrix}$$

(*d*) O traço da matriz jacobiana é nulo e o determinante é $40/(3\,x^3)$. No ponto de equilíbrio com $x = 2$, o determinante é $5/3$ e os valores próprios da matriz jacobiana são:

$$\lambda = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

assim sendo, o ponto em $(x, v) = (2, 0)$ é um centro e existem ciclos na vizinhança desse ponto, com frequência:

$$f = \frac{|\lambda|}{2\,\pi} = \frac{\sqrt{5/3}}{2\,\pi} \approx 0.205\ \text{Hz}$$

Perguntas

3. E	**6.** B	**9.** E	**12.** A	**15.** A
4. E	**7.** D	**10.** C	**13.** B	**16.** D
5. E	**8.** E	**11.** A	**14.** A	**17.** A