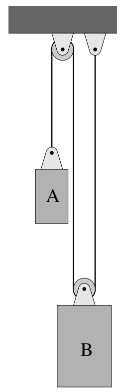
Nome:______________________________

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros!

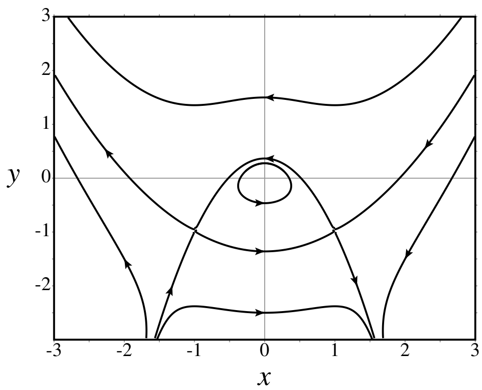
1. (4 valores). O sistema representado na figura, com 2 roldanas e 2 blocos ligados por um fio de comprimento constante, tem um único grau de liberdade. As massas dos blocos são $m_A = 0.3$ kg e $m_B = 0.7$ kg. As duas roldanas podem ser consideradas discos homogéneos (momento de inércia $I_{cm} = m\,R^2/2$), cada uma com massa de 0.06 kg. (*a*) Encontre as expressões para o valor da velocidade do bloco B e das velocidades angulares de cada uma das roldanas, em função do valor da velocidade v_A do bloco A e do raio R das roldanas (admita que as roldanas rodam sem que o fio deslize sobre elas). (*b*) Determine a expressão da energia mecânica total do sistema, em função de v_A e da distância vertical y_A desde o teto até o centro de massa do bloco A (despreze a massa do fio). (*c*) Desprezando o trabalho das forças não conservativas, encontre a equação de movimento do sistema e calcule as acelerações dos dois blocos.



2. (4 valores). A figura mostra o retrato de fase do sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = -y - x^2 \qquad \dot{y} = x - x^3$$

(*a*) Determine os conjuntos limite positivo e negativo das duas curvas de evolução que passam pelos pontos $(x, y) = (0, -2)$ e $(x, y) = (0, -0.5)$. (*b*) Calcule a divergência da velocidade de fase e diga que pode concluir-se a partir do critério de Bendixson. (*c*) Indique se o sistema tem algum ciclo, órbita homoclínica ou órbita heteroclínica. (*d*) Comente a seguinte afirmação, argumentando claramente os seus comentários: "*O retrato de fase inclui duas curvas de evolução parabólicas que se cruzam em dois pontos*".



PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. Um corpo escorrega, com movimento uniforme, do topo de um plano inclinado, fixo no solo, até à sua base. Para este percurso:

(A) A energia cinética do corpo diminui.

(B) A energia mecânica do corpo mantém-se constante.

(C) O trabalho realizado pela resultante das forças sobre o corpo é positivo.

(D) A energia potencial do corpo diminui.

(E) O trabalho realizado pela força gravítica é negativo.

Resposta: ☐

4. As equações de evolução de um sistema linear são:
$\dot{x} = x + 2\,y \qquad \dot{y} = x + y$
Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

(A) Foco repulsivo. **(D)** Centro.

(B) Foco atrativo. **(E)** Ponto de sela.

(C) Nó repulsivo.

Resposta: ☐

5. O sistema dinâmico não linear:
$\dot{x} = x\,y - 4\,x + y - 4 \qquad \dot{y} = x\,y + x - 3\,y - 3$
tem um ponto de equilíbrio em $x = 3$, $y = 4$. Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança desse ponto de equilíbrio?

(A) $\dot{x} = 5\,y \quad \dot{y} = 4\,x$ **(D)** $\dot{x} = -5\,y \quad \dot{y} = -4\,x$

(B) $\dot{x} = -4\,y \quad \dot{y} = 5\,x$ **(E)** $\dot{x} = 4\,y \quad \dot{y} = 5\,x$

(C) $\dot{x} = 5\,y \quad \dot{y} = -4\,x$

Resposta: ☐

6. A energia mecânica de um sistema conservativo com dois graus de liberdade, x e θ, é dada pela expressão $E_m = 5\,\dot{x}^2 + 7\,\dot{\theta}^2 - 3\,x\,\theta$. Encontre a expressão para a aceleração $\ddot{\theta}$.

(A) $3\,x\,\theta/14$ **(C)** $3\,x/14$ **(E)** $3\,x\,\theta/5$

(B) $3\,\theta/14$ **(D)** $3\,x/5$

Resposta: ☐

7. Um projétil é lançado desde uma janela a 2.5 m de altura, com velocidade de 16 m/s, inclinada 30° por cima da horizontal. Desprezando a resistência do ar, calcule a altura máxima que o projétil atingirá.

(A) 4.1 m **(C)** 9.0 m **(E)** 5.8 m

(B) 15.6 m **(D)** 12.3 m

Resposta: ☐

8. A matriz de um sistema dinâmico linear é: $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Se A for a curva de evolução que passa pelo ponto (1,1) no espaço de fase e B for a curva de evolução que passa pelo ponto (1,-1), podemos afirmar que a origem é:

(A) Conjunto limite positivo de A e limite negativo de B.

(B) Conjunto limite negativo de A e de B.

(C) Conjunto limite negativo de A e limite positivo de B.

(D) Conjunto limite positivo de A e de B.

(E) Centro de A e B que são ciclos.

Resposta: ☐

9. A posição de um ponto ao longo de um percurso, em função do tempo, é dada pela expressão $y = 10\,t - t^2$ (SI). Determine a distância percorrida pelo ponto entre $t = 0$ e $t = 7.5$ s.

(A) 31.25 m **(C)** 25 m **(E)** 9.25 m

(B) 43.75 m **(D)** 6.25 m

Resposta: ☐

10. Num sistema dinâmico contínuo no plano xy, se os conjuntos limite positivo e negativo de uma curva de evolução C são ambos o mesmo objeto L, qual das seguintes afirmações poderá ser verdadeira?

(A) L é um ponto de equilíbrio atrativo.

(B) L é um centro.

(C) C é uma órbita heteroclínica.

(D) C é um ciclo.

(E) L é um atrator estranho.

Resposta: ☐

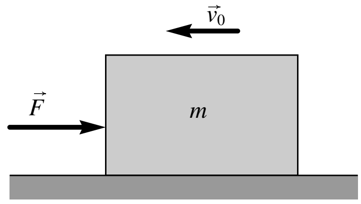
11. O vetor posição de um ponto, em função do tempo, é dado pela expressão: $2\,t^4\,\vec{e}_x + (t^2+2)\,\vec{e}_y$ (unidades SI). Calcule o ângulo entre a velocidade e o vetor posição, no instante $t = 1$.

(A) 88.8° **(C)** 67.6° **(E)** 42.3°

(B) 55.0° **(D)** 16.9°

Resposta: ☐

12. O bloco na figura, com massa igual a 6 kg, desloca-se para a esquerda, com velocidade inicial $\vec{v}_0$, sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco atua uma força externa $\vec{F}$, horizontal e constante, com módulo igual a 30 N. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é igual a 0.25. Calcule o módulo da aceleração do bloco.



(A) 15.3 m/s^2 **(C)** 5.0 m/s^2 **(E)** 7.45 m/s^2

(B) 44.7 m/s^2 **(D)** 2.55 m/s^2

Resposta: ☐

13. As equações $\dot{x} = x(2+y)$, $\dot{y} = y(2+x)$ definem um sistema:

(A) De duas espécies com cooperação.

(B) Predador presa.

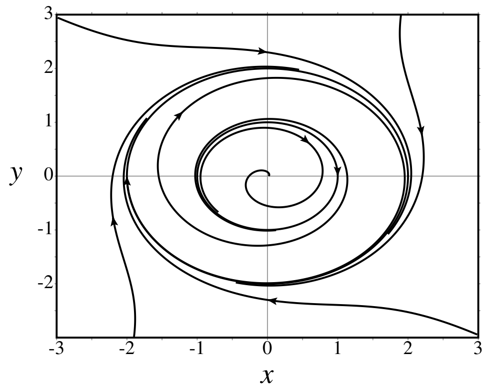
(C) Linear.

(D) Conservativo.

(E) De duas espécies com competição.

Resposta: ☐

14. A figura mostra o retrato de fase de um sistema com duas variáveis de estado x e y. Quais são as equações de evolução do sistema em coordenadas polares?



(A) $\dot{\theta} = 2 \quad \dot{r} = 3\,r^2 - 2\,r$

(B) $\dot{\theta} = 2 \quad \dot{r} = r^3 - 3\,r^2 + 2\,r$

(C) $\dot{\theta} = 2 \quad \dot{r} = 3\,r^2 - r^3 - 2\,r$

(D) $\dot{\theta} = -2 \quad \dot{r} = 3\,r^2 - r^3 - 2\,r$

(E) $\dot{\theta} = -2 \quad \dot{r} = r^3 - 3\,r^2 + 2\,r$

Resposta: ☐

15. Quando se liga um PC, o disco rígido demora 1.8 s, a partir do repouso, até atingir a sua velocidade normal de operação de 7200 rotações por minuto. Admitindo aceleração angular constante durante esse intervalo, determine o valor da aceleração angular

(A) 182 rad/s^2 **(C)** 279 rad/s^2 **(E)** 838 rad/s^2

(B) 419 rad/s^2 **(D)** 209 rad/s^2

Resposta: ☐

16. Duas crianças com massas de 30 kg e 35 kg estão sentadas nos dois lados de um sobe e desce. Se a criança mais pesada estiver sentada a 1.2 m do eixo do sobe e desce, a que distância do eixo deverá sentar-se a outra criança para manter o sobe e desce em equilíbrio?

(A) 1.03 m **(C)** 1.63 m **(E)** 0.88 m

(B) 1.4 m **(D)** 0.6 m

Resposta: ☐

17. Num sistema que se desloca no eixo dos x, a força resultante é $-x^2 + x + 6$. O sistema tem uma órbita homoclínica que se aproxima assimptoticamente do ponto $(a,\,0)$ no espaço de fase. Qual é o valor de a?

(A) 1 **(C)** 2 **(E)** -2

(B) -1 **(D)** 3

Resposta: ☐

Problemas

1. (*a*) Medindo as posições y_A e y_B dos blocos na vertical, com origem no teto e sentido positivo para baixo,

$$y_\mathrm{A} + 2\,y_\mathrm{B} = k \quad \Longrightarrow \quad v_\mathrm{B} = -\frac{v_\mathrm{A}}{2}$$

onde k é uma constante. Se ω_1 for a velocidade angular da roldana do lado esquerdo, ω_2 a velocidade angular da roldana do lado direito e arbitrando sentido positivo no sentido antihorário,

$$\omega_1 = \frac{v_\mathrm{A}}{R} \qquad \omega_2 = \frac{v_\mathrm{B}}{R} = \frac{v_\mathrm{A}}{2R}$$

(*b*) Se m for a massa das roldanas,

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\left(m_\mathrm{A} v_\mathrm{A}^2 + m_\mathrm{B} v_\mathrm{B}^2 + m\,v_\mathrm{B}^2 + \frac{m R^2}{2}\,\omega_1^2 + \frac{m R^2}{2}\,\omega_2^2\right) = \frac{v_\mathrm{A}^2}{2}\left(m_\mathrm{A} + \frac{m_\mathrm{B}}{4} + \frac{m}{4} + \frac{m}{2} + \frac{m}{8}\right)$$
$$= \frac{v_\mathrm{A}^2}{2}\left(m_\mathrm{A} + \frac{m_\mathrm{B}}{4} + \frac{7\,m}{8}\right) = 0.26375\,v_\mathrm{A}^2$$
$$U = -m_\mathrm{A}\,g\,y_\mathrm{A} - (m_\mathrm{B} + m)\,g\,y_\mathrm{B} = -m_\mathrm{A}\,g\,y_\mathrm{A} - \frac{(m_\mathrm{B} + m)\,g}{2}(k - y_\mathrm{A}) = 0.748\,y_\mathrm{A} - 3.724\,k$$
$$E_\mathrm{m} = 0.26375\,v_\mathrm{A}^2 + 0.748\,y_\mathrm{A} - 3.724\,k$$

(*c*) A equação de Lagrange para a coordenada y_A e a velocidade v_A é:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial v_\mathrm{A}}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial y_\mathrm{A}} + \frac{\partial U}{\partial_\mathrm{A}} = 0$$

que conduz à equação de movimento

$$0.5275\,a_\mathrm{A} + 0.784 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_\mathrm{A} = -\frac{0.784}{0.5275} = -1.486\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

o sinal negativo indica que o bloco A sobe. A aceleração do bloco B é,

$$a_\mathrm{B} = -\frac{a_\mathrm{A}}{2} = 0.743\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

o sinal pisitivo indica que o bloco B desce.

2. (a) O sistema tem unicamente os 3 pontos de equilíbrio representados na figura: um centro na origem e dois pontos de sela em (1, −1) e (−1, −1). Os conjuntos limite negativo e positivo da curva que passa por (0, −2) não existem. Os conjuntos limite negativo e positivo da curva que passa por (0, −0.5) é um ciclo à volta da origem.

(*b*) A divergência da velocidade de fase é:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial\left(-y - x^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(x - x^3\right)}{\partial y} = -2\,x$$

O critério de Bendixson implica que podem existir ciclos o órbitas, mas deverão incluir sempre pelo menos um ponto do eixo dos y (onde x é zero).

(*c*) O sistema tem uma órbita heteroclínica que une os dois pontos de sela (1, −1) e (−1, −1), e no interior dessa órbita todas as curvas de evolução são ciclos.

(*d*) A afirmação é falsa. As duas curvas aparentemente parabólicas são realmente 6 curvas de evolução separadas, que se aproximam assimptoticamente dos dois pontos de sela, sem tocá-los. As curvas de evolução nunca podem cruzar-se entre si.

Perguntas

3. D
4. E
5. E
6. C
7. E
8. C
9. A
10. D
11. E
12. E
13. A
14. D
15. B
16. B
17. E