U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

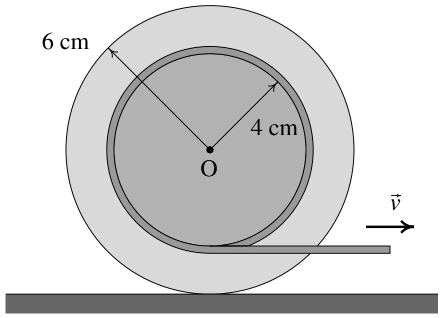
MESTRADO INTEGRADO EM ENG. INFORMÁTICA E COMPUTAÇÃO 2012/2013

EIC0010 — FÍSICA I 1º ANO 2º SEMESTRE

Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros!

1. (4 valores). Um cilindro com raio de 4 cm está colado a uma roda com 6 cm de raio que se encontra sobre uma superfície horizontal plana, tal como mostra a figura. Uma corda foi enrolada à volta do cilindro e está a ser puxada horizontalmente para a direita, com velocidade constante $\vec{v}$ de valor 2.5 cm/s. O movimento da corda faz rodar a roda sobre a superfície horizontal, sem derrapar. (a) Determine o valor da velocidade angular da roda. (b) Diga em que sentido se desloca o ponto O, no eixo da roda e do cilindro, e determine o valor da sua velocidade. (c) Determine quantos centímetros de corda são desenrolados do cilindro a cada segundo.



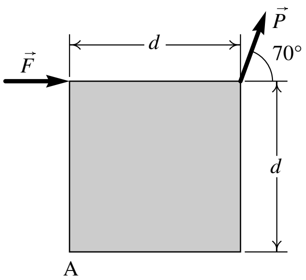
2. (4 valores). O sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = 2\,x\,y^3 - x^4 \qquad \dot{y} = y^4 - 2\,x^3\,y$$

tem um único ponto de equilíbrio na origem. A matriz jacobiana nesse ponto é igual a zero e, portanto, os valores próprios (nulos) não podem ser usados para caraterizar o ponto de equilíbrio. Use o seguinte método para analisar o retrato de fase do sistema: (a) Determine o versor na direção da velocidade de fase em qualquer ponto do eixo dos x e em qualquer ponto do eixo dos y. (b) Determine o versor na direção da velocidade de fase em qualquer ponto das duas retas $y = x$ e $y = -x$. (c) Faça a mão um gráfico mostrando os versores que encontrou nas alíneas a e b, em vários pontos nos 4 quadrantes do espaço de fase, e trace algumas curvas de evolução seguindo as direções da velocidade de fase. Com base nesse gráfico, que tipo de ponto de equilíbrio julga que é a origem? (d) Diga se existem ciclos, órbitas homoclínicas ou heteroclínicas e no caso afirmativo quantas. (e) No primeiro quadrante, $x \geq 0$, $y \geq 0$, o sistema pode ser considerado um sistema de duas espécies. Diga se é um sistema com cooperação, com competição ou predador presa. Explique em palavras como será a evolução das duas populações x e y a partir de quaisquer valores iniciais x_0 e y_0.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. O quadrado na figura tem aresta $d = 9$ cm. O módulo da força $\vec{F}$ é 20 N e o módulo da força $\vec{P}$ é 60 N. Determine o módulo do momento produzido por essas duas forças em relação ao ponto A.



(A) 3.95 N·m **(C)** 3.6 N·m **(E)** 8.72 N·m
(B) 1.43 N·m **(D)** 7.2 N·m

Resposta: ☐

4. A componente x da aceleração de uma partícula aumenta em função do tempo, de acordo com a expressão $a_x = 5\,t$ (unidades SI). No instante $t = 0$ a componente x da velocidade é nula e a componente da posição é $x = 7$ m. Determine a componente x da posição em $t = 2$ s.

(A) 13.7 m **(C)** 41.0 m **(E)** 6.8 m
(B) 84.7 m **(D)** 34.2 m

Resposta: ☐

5. Qual dos sistemas dinâmicos na lista é equivalente à equação diferencial $2\,\ddot{x}\,x - 2\,x^2\,\dot{x} + 4\,x^3 = 0$?

(A) $\dot{x} = y \quad \dot{y} = 2\,y - 2$
(B) $\dot{x} = y \quad \dot{y} = 4\,x\,y - 2\,x$
(C) $\dot{x} = y \quad \dot{y} = x\,y - 2\,x^2$
(D) $\dot{x} = y \quad \dot{y} = 2\,y + x$
(E) $\dot{x} = y \quad \dot{y} = 2\,y - 2\,x$

Resposta: ☐

6. O espaço de fase de um sistema dinâmico é o plano xy. Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 - 2\,r^2 + r$. Quantos ciclos limite tem o sistema?

(A) 3 **(C)** 0 **(E)** 4
(B) 1 **(D)** 2

Resposta: ☐

7. Num sistema que se desloca no eixo dos x, a força resultante é $x^2 + x - 2$. Na lista seguinte, qual dos valores corresponde à posição x dum ponto de equilíbrio estável?

(A) 1 **(C)** 2 **(E)** 3
(B) -1 **(D)** -2

Resposta: ☐

8. Um ponto num objeto descreve numa trajetória curva, com raio constante. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A aceleração angular é constante.

(B) A velocidade angular é constante.

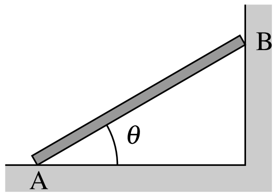
(C) O módulo da velocidade é diretamente proporcional à velocidade angular.

(D) A aceleração normal é constante.

(E) O módulo da aceleração é diretamente proporcional à aceleração angular.

Resposta: ☐

9. A figura mostra uma barra reta com comprimento L que está a cair; enquanto a barra cai, o extremo A desliza na superfície horizontal e o extremo B desliza sobre a parede vertical. Qual é a relação entre os valores das velocidades dos dois extremos?



(A) $v_\text{A} = v_\text{B} \tan\theta$ **(D)** $v_\text{A} = v_\text{B} \sin\theta$

(B) $v_\text{A} = 2\, v_\text{B}$ **(E)** $v_\text{A} = v_\text{B}$

(C) $v_\text{A} = v_\text{B} \cos\theta$

Resposta: ☐

10. Um bloco de massa 2 kg desce deslizando sobre a superfície de um plano inclinado com base $x = 8$ m e altura $y = 4$ m. Calcule o módulo da reação normal do plano sobre o bloco.

(A) 19.6 N **(C)** 17.53 N **(E)** 8.77 N

(B) 10.87 N **(D)** 4.93 N

Resposta: ☐

11. Quais são as componentes da velocidade de fase do sistema conservativo com energia potencial $U(x) = 3\,\mathrm{e}^x$ e massa $m = 3$?

(A) $v\,\vec{e}_x + \mathrm{e}^{-x}\,\vec{e}_y$ **(D)** $v\,\vec{e}_x - x\,\vec{e}_y$

(B) $v\,\vec{e}_x - \mathrm{e}^{-x}\,\vec{e}_y$ **(E)** $v\,\vec{e}_x + \mathrm{e}^{x}\,\vec{e}_y$

(C) $v\,\vec{e}_x - \mathrm{e}^{x}\,\vec{e}_y$

Resposta: ☐

12. A velocidade de uma partícula, em função do tempo, é: $2\,t^2\,\vec{e}_x + t^4\,\vec{e}_y$ (unidades SI). Encontre a expressão para o módulo da aceleração.

(A) $4\,t^3 + 4\,t$ **(D)** $4\,t$

(B) $\sqrt{16\,t^6 + 16\,t^2}$ **(E)** $4\,t^3$

(C) $\sqrt{4\,t^3 + 4\,t}$

Resposta: ☐

13. Em qual dos seguintes sistemas dinâmicos o critério de Bendixson permite concluir que não pode existir nenhum ciclo, órbita homoclínica ou órbita heteroclínica?

(A) $\dot{x} = 3xy \quad \dot{y} = 2xy$ **(D)** $\dot{x} = xy^2 \quad \dot{y} = -x^2y$

(B) $\dot{x} = -2xy \quad \dot{y} = -xy$ **(E)** $\dot{x} = xy \quad \dot{y} = x^3y$

(C) $\dot{x} = 2xy^2 \quad \dot{y} = x^2y$

Resposta: ☐

14. A energia mecânica de um corpo celeste em órbita à volta do Sol pode ser considerada constante e é dada pela expressão

$$E_\text{m} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{4\,\pi^2\,m}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

onde m é a massa do corpo, x e y as suas coordenadas no plano da órbita com origem no Sol, as distâncias são medidas em unidades astronómicas e o tempo em anos. Encontre a expressão da componente y da aceleração ($\ddot{y}$).

(A) $\ddot{y} = -\dfrac{4\,\pi^2\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ **(D)** $\ddot{y} = -\dfrac{4\,\pi^2\,x\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

(B) $\ddot{y} = \dfrac{4\,\pi^2\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ **(E)** $\ddot{y} = \dfrac{4\,\pi^2\,x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

(C) $\ddot{y} = -\dfrac{4\,\pi^2\,x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

Resposta: ☐

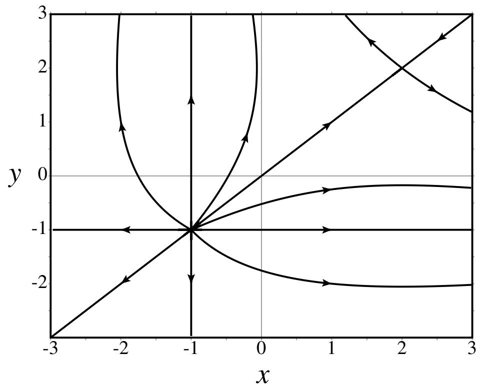
15. Quando um cilindro com massa 135 g é pendurado de uma mola vertical, fica em equilíbrio a uma altura de 10 cm. Se o cilindro for substituído por outro com massa de 139 g, ficará em equilíbrio a uma altura de 7 cm. Calcule a constante elástica da mola.

(A) 2613 mN/m **(C)** 1307 mN/m **(E)** 653 mN/m

(B) 133 mN/m **(D)** 261 mN/m

Resposta: ☐

16. A figura mostra o retrato de fase de um sistema não linear com dois pontos de equilíbrio, em $(x, y) = (-1, -1)$ e $(x, y) = (2, 2)$. Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança do ponto $(-1, -1)$?



(A) $\dot{x} = 3\,x \quad \dot{y} = -3\,y$ **(D)** $\dot{x} = 3\,y \quad \dot{y} = -3\,y$

(B) $\dot{x} = -3\,y \quad \dot{y} = 3\,x$ **(E)** $\dot{x} = -3\,x \quad \dot{y} = -3\,y$

(C) $\dot{x} = 3\,x \quad \dot{y} = 3\,y$

Resposta: ☐

17. Numa máquina de Atwood, com dois cilindros de 200 e 500 gramas e roldana com 600 gramas, a expressão para a energia mecânica total é: $0.5\,v^2 - 0.3\,g\,y$, em unidades SI, onde g é a aceleração da gravidade, y é a distância que o cilindro mais pesado desce e v a velocidade com que esse cilindro desce. Calcule o valor da aceleração dos cilindros, em unidades SI, admitindo conservação da energia mecânica.

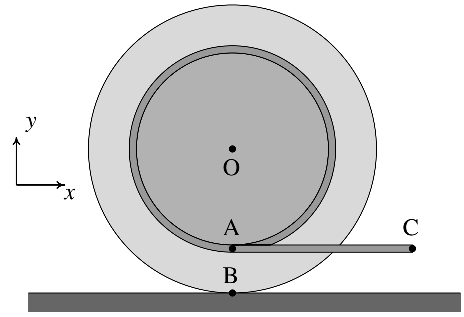
(A) 5.88 **(C)** 16.33 **(E)** 32.67

(B) 9.8 **(D)** 2.94

Resposta: ☐

Problemas

1. (*a*) Como a roda não derrapa, a velocidade do ponto B é nula. Escolhendo o sistema de eixos indicado na figura, e distâncias em centímetros, a velocidade do ponto A será:



$$\vec{v}_A = -d_{AB}\,\omega\,\vec{e}_x = -2\,\omega\,\vec{e}_x$$

onde ω é a velocidade angular da roda, positiva no sentido anti horário ou negativa no sentido horário. Como a velocidade do ponto A é igual à velocidade do ponto C, que é $2.5\,\vec{e}_x$, a velocidade angular é:

$$\omega = \frac{2.5}{-2} = -1.25\ \text{s}^{-1}$$

o sinal negativo indica que a velocidade angular é no sentido horário.

(b) Como a velocidade angular da roda é no sentido horário, o ponto O desloca-se para a direita. O valor da sua velocidade é:

$$v_O = d_{OB}\,\omega = 7.5\ \text{cm/s}$$

(*c*) A velocidade do ponto C, em relação ao ponto O, é:

$$\vec{v}_{C/O} = \vec{v}_C - \vec{v}_O = 2.5\,\vec{e}_x - 7.5\,\vec{e}_x = -5\,\vec{e}_x$$

o sentido dessa velocidade, no sentido negativo do eixo dos x, indica que os pontos O e C estão a aproximarem-se e o fio não está a desenrolar-se mas sim a enrolar-se ainda mais: cada segundo enrolam-se mais 5 cm de fio.

2. (a) No eixo dos x, y é igual a zero e a velocidade de fase será,

$$\vec{u} = -x^4\,\vec{e}_x \quad\Longrightarrow\quad \vec{e}_u = -\vec{e}_x$$

No eixo dos y, x é igual a zero e a velocidade de fase será,

$$\vec{u} = y^4\,\vec{e}_y \quad\Longrightarrow\quad \vec{e}_u = \vec{e}_y$$

(b) Na reta $y = x$, a velocidade de fase é,

$$\vec{u} = x^4\,\vec{e}_x - x^4\,\vec{e}_y$$

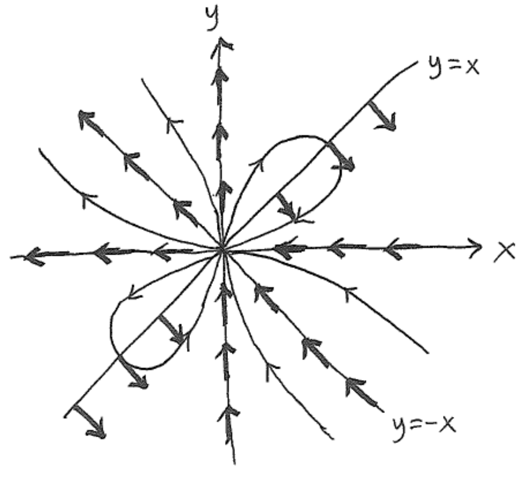
o seu módulo é $\sqrt{2}x^4$ e o versor que define a sua direção é,

$$\vec{e}_u = \frac{x^4\,\vec{e}_x - x^4\,\vec{e}_y}{\sqrt{2}x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$$

Na reta $y = -x$,

$$\vec{u} = -3x^4\,\vec{e}_x + 3x^4\,\vec{e}_y \quad\Longrightarrow\quad \vec{e}_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

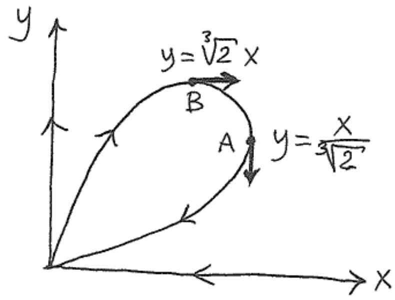
(c) A figura mostra os versores encontrados nas duas alíneas anteriores e algumas curvas de evolução. Como há curvas que se aproximam da origem e curvas que se afastam dele, a origem é um ponto de sela.



(*d*) Não existem ciclos nem órbitas heteroclínicas. Existe um número infinito de órbitas homoclínicas: todas as curvas de evolução no primeiro e terceiro quadrantes são órbitas homoclínicas.

(*e*) A população y faz aumentar a taxa de crescimento $\dot{x}$ da população x e a população x faz diminuir a taxa de crescimento $\dot{y}$ da população y. Assim sendo, trata-se de um sistema predador presa, em que x são os predadores e y as presas. Se o número inicial de predadores, x_0, for nulo, o número de presas aumentará ilimitadamente. Se o número inicial de presas, y_0, for nulo, o número de predadores diminuirá até zero.

Quando os números iniciais de predadores e presas não sejam nulos, as duas populações evoluirão seguindo uma órbita homoclínica. O ponto A em que a população de predadores atinge o seu valor máximo é quando a componente x da velocidade de fase é nula, ou seja, $y = x/\sqrt[3]{2}$. O ponto B onde a população de presas atinge o seu valor máximo é quando a componente y da velocidade de fase é nula, ou seja, $y = \sqrt[3]{2}x$. Assim sendo, existem 3 casos diferentes: (*i*) Se $y_0 > \sqrt[3]{2}x_0$, os números de predadores e presas aumentam, até um instante t_B em que o número de presas começa a diminuir; num instante posterior t_A, o número de predadores também começa a diminuir e finalmente as duas populações serão extintas. (*ii*) Se $x_0/\sqrt[3]{2} < y_0 \le \sqrt[3]{2}x_0$, o número de presas diminui e o número de predadores aumenta, até um instante t_A em que o número de predadores também começa a diminuir e as duas populações serão extintas. (*iii*) Se $0 < y_0 \le x_0/\sqrt[3]{2}$, as duas populações diminuem até se extinguirem totalmente.



Perguntas

3. B

4. A

5. C

6. B

7. D

8. C

9. A

10. C

11. C

12. B

13. C

14. A

15. C

16. C

17. D