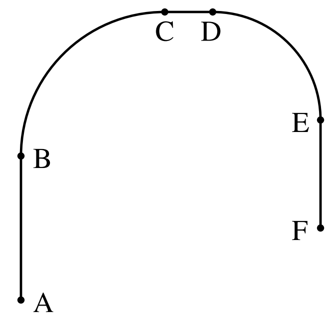
Nome:____________________________________

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros!

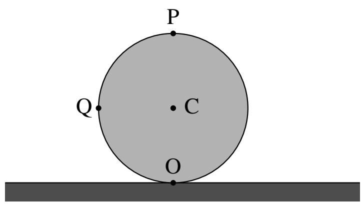
1. (4 valores) Uma partícula segue a trajetória que mostra a figura. A partícula parte do repouso em A, acelerando com aceleração constante até o ponto B; desde B até E mantém uma velocidade constante de 10 m/s e a partir de E começa a abrandar, com aceleração constante, até parar no ponto F. A distância AB é 60 cm, CD é 20 cm e EF é 45 cm; o raio do arco BC é 60 cm e o raio do arco DE é 45 cm. Calcule: (a) o módulo da aceleração da partícula em cada um dos trajetos AB, BC, CD, DE e EF; (b) a distância total percorrida e a velocidade média desde A até F.



2. (4 valores). Uma particula com massa $m = 2$ (unidades SI), desloca-se sobre uma calha parabólica vertical. A equação da calha é $y = x^2$, onde x é medida na horizontal e y na vertical (ambas em unidades SI). Assim sendo, o movimento da partícula tem apenas um grau de liberdade. (a) Usando como variável generalizada a coordenada x, escreva a equação da energia cinética em função de x. (b) escreva a equação da energia potencial gravítica, em função de x (admita que, em unidades SI, $g = 9.8$). (c) Admita que sobre a partícula não atua nenhuma força não conservativa. Usando a equação de Lagrange, determine a equação de movimento. (d) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema, no espaço de fase, e diga que tipo de pontos de equilibrio são (justifique a sua resposta).

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. A roda na figura tem 8 cm de raio e roda sem deslizar sobre uma superfície plana horizontal. No instante representado na figura, a velocidade do ponto de contacto O é nula e o módulo da velocidade do ponto P é 60 cm/s. Determine o módulo da velocidade do ponto Q, que está à mesma altura do centro C.



(**A**) 56.6 cm/s (**C**) 14.1 cm/s (**E**) 42.4 cm/s
(**B**) 21.2 cm/s (**D**) 28.3 cm/s

Resposta: ☐

4. O vetor velocidade de uma partícula, em função do tempo, é: $t^3\,\vec{e}_x + 0.3\,t^2\,\vec{e}_y$ (unidades SI). Em $t = 0$ a partícula parte do ponto $y = -9$ no eixo dos y. Calcule o tempo que demora até passar pelo eixo dos x.

(**A**) 5.48 s (**C**) 3.91 s (**E**) 4.48 s
(**B**) 3.11 s (**D**) 7.75 s

Resposta: ☐

5. A expressão da energia cinética de um sistema conservativo é $\frac{1}{2}\left(\dot{s}^2 + 2\,s^2\right)$, onde s é a posição na trajetória, e a expressão da energia potencial total é $-4\,s$. O sistema tem um único ponto de equilíbrio; determine o valor de s nesse ponto de equilíbrio.

(**A**) -1 (**C**) 1 (**E**) 2
(**B**) -2 (**D**) 3

Resposta: ☐

6. A velocidade de um ponto é dada pela expressão $2\,s^3$ em que s é a posição na trajetória. Determine a expressão para a aceleração segundo a trajetória, a_t, em função de s.

(**A**) $\dfrac{2\,s^3}{t}$ (**B**) $2\,s^2$ (**D**) $12\,s^5$
(**C**) $2\,s^4$ (**E**) $6\,s^2$

Resposta: ☐

7. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado tem uma curva de evolução com conjunto limite positivo num ponto P. Designando os tipos de pontos de equilíbrio assim:

1. foco atrativo.
2. foco repulsivo.
3. nó atrativo.
4. nó repulsivo.
5. centro.

Que tipo de ponto de equilíbrio pode ser o ponto P?

(**A**) 2 ou 4 (**C**) 5 (**E**) 1 ou 3
(**B**) 1 ou 2 (**D**) 3 ou 4

Resposta: ☐

8. Qual das seguintes equações podera ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

(A) $\dot{y} = x + x\,y^2$
(B) $\dot{y} = -5\,x\,y + 2\,y$
(C) $\dot{y} = 6\,y - y^2$
(D) $\dot{y} = 2\,y^2 - 3\,y$
(E) $\dot{y} = 2\,y - 5\,y^2$

Resposta: ☐

9. O espaço de fase de um sistema dinâmico é o plano xy. Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 + 2\,r^2 + r$. Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

(A) foco atrativo
(B) nó repulsivo
(C) nó atrativo
(D) ponto de sela
(E) foco repulsivo

Resposta: ☐

10. Lança-se um projétil desde uma janela a 5.6 m de altura, com velocidade de 14 m/s, inclinada 30° por cima da horizontal. Desprezando a resistência do ar, calcule a altura máxima atingida pelo projétil.

(A) 8.1 m
(B) 10.6 m
(C) 13.1 m
(D) 15.6 m
(E) 6.9 m

Resposta: ☐

11. O momento de inércia de um disco de 11 cm de raio é 5.2×10^{-3} kg·m^2. Determine o valor da força tangencial que deve ser aplicada na periferia do disco, para produzir uma aceleração angular de -6 rad/s^2.

(A) 0.57 N
(B) 1.13 N
(C) 0.19 N
(D) 0.11 N
(E) 0.28 N

Resposta: ☐

12. Um bloco de massa 4 kg desce deslizando sobre a superfície de um plano inclinado, partindo do ponto A com valor da velocidade igual a 7 m/s e parando completamente no ponto B. As alturas dos pontos A e B, medidas na vertical desde a base horizontal do plano, são: $h_B = 10$ cm e $h_A = 60$ cm. Calcule o trabalho realizado pela força de atrito, desde A até B.

(A) -121.5 J
(B) -125.4 J
(C) -129.4 J
(D) -117.6 J
(E) -133.3 J

Resposta: ☐

13. O sistema dinâmico não linear:
$\dot{x} = x\,y - 4\,x + y - 4 \qquad \dot{y} = x\,y + x - 3\,y - 3$
tem um ponto de equilíbrio em $x = 3$, $y = 4$. Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança desse ponto de equilíbrio?

(A) $\dot{x} = 4\,y \quad \dot{y} = 5\,x$
(B) $\dot{x} = -5\,y \quad \dot{y} = -4\,x$
(C) $\dot{x} = 5\,y \quad \dot{y} = -4\,x$
(D) $\dot{x} = -4\,y \quad \dot{y} = 5\,x$
(E) $\dot{x} = 5\,y \quad \dot{y} = 4\,x$

Resposta: ☐

14. A força tangencial resultante sobre um objeto é $-s^2 + 2\,s + 3$, onde s é a posição na trajetória. Sabendo que o retrato de fase do sistema tem uma órbita homoclínica que se aproxima assimptoticamente do ponto $(a, 0)$, determine o valor de a.

(A) 2
(B) -1
(C) 3
(D) 1
(E) -2

Resposta: ☐

15. Uma menina atira uma bola verticalmente para cima; a bola alcança uma altura máxima de 3 m e a seguir cai de volta até à mão da menina. Durante o percurso, a resistência do ar sobre a bola pode ser ignorada. Qual das seguintes afirmações é correta?

(A) A aceleração é para cima, enquanto a bola sobe, e para baixo na descida.
(B) A aceleração da bola aponta sempre no mesmo sentido.
(C) Na descida, a velocidade da bola aumenta devido a que a sua aceleração aumenta.
(D) A bola pára a 3 m de altura porque a aceleração é menor quanto maior for a altura
(E) A aceleração da bola é nula quando a altura é 3 m.

Resposta: ☐

16. De acordo com o critério de Bendixson, qual dos seguintes sistemas dinâmicos não pode ter nenhuma órbita fechada (ciclo, órbita homoclínica ou órbita heteroclínica)?

(A) $\dot{x} = 3\,x + y^2 \quad \dot{y} = x^2 + y^2$
(B) $\dot{x} = 3\,x^2 + y^2 \quad \dot{y} = x^2 - y^2$
(C) $\dot{x} = 3\,x^2 + y^2 \quad \dot{y} = y - y\,x^2$
(D) $\dot{x} = 3\,x + y^2 \quad \dot{y} = x^2 y - y$
(E) $\dot{x} = 3\,x^2 + y^2 \quad \dot{y} = x^2 y - y$

Resposta: ☐

17. As equações de evolução de um sistema linear são:
$\dot{x} = -2\,x - y \qquad \dot{y} = 2\,x$
Que tipo de ponto de equilíbrio tem esse sistema?

(A) centro.
(B) foco repulsivo.
(C) ponto de sela.
(D) foco atrativo.
(E) nó repulsivo.

Resposta: ☐

Problemas

1. (*a*) No trajeto AB,

$$a_\mathrm{t} = v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s} \quad\Longrightarrow\quad a_\mathrm{t}\int_0^{0.6}\mathrm{d}\,s = \int_0^{10} v\,\mathrm{d}\,v \quad\Longrightarrow\quad a_\mathrm{t} = 83.33\ \mathrm{m/s^2}$$

o módulo da aceleração é 83.33 m/s^2. No trajeto EF,

$$a_\mathrm{t} = v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s} \quad\Longrightarrow\quad a_\mathrm{t}\int_0^{0.45}\mathrm{d}\,s = \int_{10}^{0} v\,\mathrm{d}\,v \quad\Longrightarrow\quad a_\mathrm{t} = -111.11\ \mathrm{m/s^2}$$

o módulo da aceleração é 111.11 m/s^2. No trajeto CD, o módulo da aceleração é nulo, porque o movimento é retilíneo e uniforme. No trajeto BC, a aceleração tem unicamente componente normal:

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{0.6} = 166.67\ \mathrm{m/s^2}$$

o módulo da aceleração é 166.67 m/s^2. No trajeto DE, a aceleração também tem unicamente componente normal:

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{0.45} = 222.22\ \mathrm{m/s^2}$$

o módulo da aceleração é 222.22 m/s^2.

(*b*) A distância total percorrida é a soma dos três segmentos AB, CD e EF, mais os dois arcos BC e DE, ambos com ângulo de $\pi/2$ radianos:

$$d = 0.6+0.2+0.45+\frac{\pi}{2}(0.6+0.45) = 2.90\ \mathrm{m}$$

O tempo que a partícula demora a percorrer o trajeto BCDE é:

$$t_1 = \frac{0.2+\frac{\pi}{2}(0.6+0.45)}{10} = 0.185\ \mathrm{s}$$

Para calcular o tempo que demora no trajeto AB, integra-se uma equação de movimento

$$a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} \quad\Longrightarrow\quad t_2 = \frac{1}{a_\mathrm{t}}\int_0^{10}\mathrm{d}\,v = \frac{10}{83.33} = 0.120\ \mathrm{s}$$

e usa-se o mesmo procedimento para calcular o tempo que demora no trajeto EF:

$$a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} \quad\Longrightarrow\quad t_3 = \frac{1}{a_\mathrm{t}}\int_{10}^{0}\mathrm{d}\,v = \frac{10}{111.11} = 0.090\ \mathrm{s}$$

A velocidade média é igual à distância percorrida dividida pelo tempo que demorou:

$$v_m = \frac{d}{t_1+t_2+t_3} = \frac{2.90}{0.185+0.120+0.090} = 7.34\ \mathrm{m/s}$$

2. (*a*) A relação entre $\dot{y}$ e $\dot{x}$ encontra-se derivando a equação da calha $y = x^2$

$$\dot{y} = 2x\dot{x}$$

Em função da coordenada generalizada x e da velocidade generalizada $\dot{x}$, a energia cinética da partícula é

$$E_\mathrm{c} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) = \dot{x}^2\left(4x^2+1\right)$$

(b) Arbitrando energia potencial gravítica nula em $y=0$, A energia potencial gravítica da partícula é:

$$U_{\mathrm{g}} = m\,g\,y = 19.6x^2$$

(c) A equação de Lagrange é:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial x} + \frac{\partial U_{\mathrm{g}}}{\partial x} = \ddot{x}\left(8x^2+2\right) + 16\dot{x}^2 x - 8\dot{x}^2 x + 39.2x = 0$$

e a equação de movimento:

$$\ddot{x} = -\frac{x\left(4\dot{x}^2+19.6\right)}{4x^2+1}$$

(d) As equações de evolução são:

$$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = -\frac{x\left(4\dot{x}^2+19.6\right)}{4x^2+1}$$

Os pontos de equilíbrio são as soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} v = 0 \\ -\dfrac{x\left(4v^2+19.6\right)}{4x^2+1} = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} v = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

A matriz jacobiana é:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\left(16v^2+78.4\right)x^2 - 4v^2 - 19.6}{\left(4x^2+1\right)^2} & -\dfrac{8xv}{4x^2+1} \end{bmatrix}$$

e no ponto de equilíbrio (0, 0) é igual a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -19.6 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a soma dos valores próprios é nula e o produto é positivo, os dois valores próprios são imaginários e o ponto de equilíbrio é um centro. (Também é possível traçar o retrato de fase para mostrar que a origem é um centro).

Perguntas

3. E
4. E
5. B
6. D
7. E
8. B
9. E
10. A
11. E
12. D
13. A
14. B
15. B
16. D
17. D