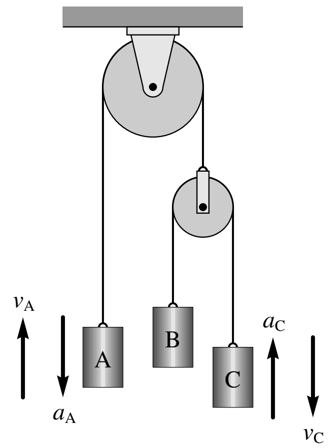
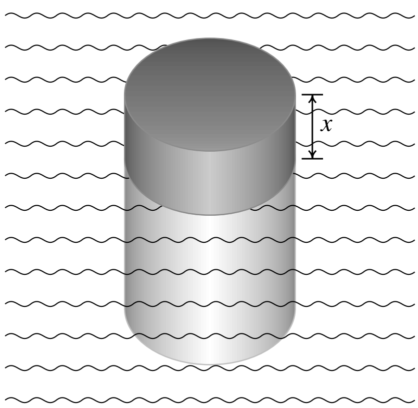
Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros!

1. (4 valores) Três cilindros A, B e C foram pendurados no sistema de duas roldanas que mostra a figura. Num instante, a velocidade do bloco A é $v_A = 3$ m/s, para cima, e a sua aceleração é $a_A = 2$ m/s^2, para baixo; no mesmo instante, a velocidade e aceleração do bloco C são: $v_C = 1$ m/s, para baixo, $a_C = 4$ m/s^2, para cima. Determine a velocidade e aceleração do bloco B, no mesmo instante, indicando se são para cima ou para baixo.



2. (4 valores). Um cilindro com base circular de área $A = 10$ cm^2, altura $h = 16$ cm e massa $m = 144$ g, flutua num recipiente com água, ficando em equilíbrio estável na posição que mostra a figura, com uma parte x da sua altura por fora da água. Se o cilindro é empurrado para baixo, oscila com x a variar à volta do valor de equilíbrio. A força de impulsão da água é vertical, aponta para cima e (se $0 \le x \le h$) é uma força conservativa com energia potencial $U_i = g\,\rho\,A\left(\dfrac{x^2}{2} - h\,x\right)$, onde $g = 9.8$ m/s^2 é a aceleração da gravidade e $\rho = 1$ g/cm^3 é a massa volúmica da água. Para determinar a posição de equilíbrio e o período das oscilações, ignore as forças dissipativas e use o seguinte procedimento: (a) Determine a equação de movimento e escreva as equações de evolução. (b) Encontre o valor de x no ponto de equilíbrio. (c) Determine a matriz do sistema, mostre que o ponto de equilíbrio é um centro e calcule o período de oscilação.



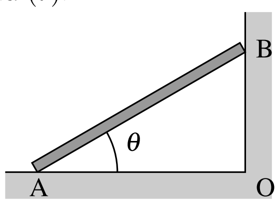
PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. Um condutor viajou a 60 km/h durante 45 minutos, parou durante 15 minutos e continuou a 40 km/h durante meia hora. Calcule a velocidade média do percurso total.

(**A**) 65.0 km/h (**C**) 50.0 km/h (**E**) 43.3 km/h
(**B**) 33.3 km/h (**D**) 20.0 km/h

Resposta: ☐

4. A barra na figura tem 1.5 m de comprimento e está a cair, enquanto o ponto A desliza na superfície horizontal e o ponto B desliza ao longo da parede vertical. Num instante em que o ângulo é $\theta = 25°$ e a velocidade do ponto B tem valor de 3 m/s, determine o valor da velocidade angular da barra ($\dot{\theta}$).



(**A**) 4.29 rad/s (**C**) 2.0 rad/s (**E**) 4.73 rad/s
(**B**) 2.21 rad/s (**D**) 0.44 rad/s

Resposta: ☐

5. A força tangencial resultante sobre uma partícula é $F_t = (s+1)(s-1)(s-3)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira, em relação aos pontos de equilíbrio da partícula?

(**A**) $s = 1$ é instável e $s = 3$ é estável.
(**B**) $s = -1$ é instável e $s = 3$ é estável.
(**C**) $s = 1$ é estável e $s = 3$ é instável.
(**D**) $s = -1$ é estável e $s = 3$ é instável.
(**E**) $s = -1$ e $s = 1$ são instáveis.

Resposta: ☐

6. Se o conjunto limite positivo de uma curva de evolução A, no espaço de fase, é um ciclo limite C, qual das afirmações é correta?

(**A**) A torna-se exatamente igual a C após algum tempo.
(**B**) Todos os pontos de C pertencem também a A.
(**C**) A toca o ciclo C num ponto.
(**D**) A aproxima-se de C, sem nunca o tocar.
(**E**) A afasta-se de C.

Resposta: ☐

7. Calcule o ângulo entre a velocidade $\vec{v} = 2\,\vec{e}_x + 3\,\vec{e}_y - \vec{e}_z$ e a aceleração $\vec{a} = \vec{e}_x - 2\,\vec{e}_y - 3\,\vec{e}_z$ de uma partícula.

(A) 115.4° **(C)** 110.9° **(E)** 50.0°
(B) 94.1° **(D)** 21.8°

Resposta: ☐

8. Um bloco desce um plano inclinado, deslizando com velocidade constante. Pode afirmar-se que nesse percurso:

(A) O trabalho realizado pela resultante das forças sobre o corpo é positivo.

(B) O trabalho realizado pela força gravítica é negativo.

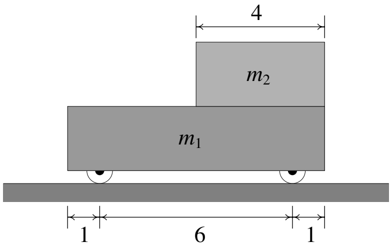
(C) A energia cinética do corpo diminui.

(D) A energia potencial do corpo diminui.

(E) A energia mecânica do corpo mantém-se constante.

Resposta: ☐

9. As distâncias na figura estão em centímetros. O carrinho, incluindo as rodas, tem massa $m_1 = 140$ g, distribuída uniformemente, e o bloco de cima tem massa $m_2 = 315$ g, também distribuída uniformemente. Determine o valor da reação normal total nas duas rodas do lado esquerdo.



(A) 1.201 N **(C)** 0.743 N **(E)** 1.486 N
(B) 1.543 N **(D)** 2.23 N

Resposta: ☐

10. Calcule a matriz jacobiana do sistema dinâmico equivalente à seguinte equação diferencial:
$\ddot{x} + 3\,\dot{x}\,x - x^2 = 0$
no espaço de fase (x,y).

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\,x - 3\,y & 3\,x \end{bmatrix}$ **(D)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\,x - 3\,y & -3\,x \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\,x + 3\,y & 3\,x \end{bmatrix}$ **(E)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3\,y - 2\,x & 3\,x \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\,x - 3\,y & -3\,x \end{bmatrix}$

Resposta: ☐

11. A matriz de um sistema dinâmico linear é:
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$
Que tipo de ponto de equilíbrio tem esse sistema?

(A) nó atrativo. **(D)** nó repulsivo.
(B) foco repulsivo. **(E)** foco atrativo.
(C) centro.

Resposta: ☐

12. A aceleração tangencial de um objeto verifica a expressão $a_t = 5\,s^4$ (unidades SI), em que s é a posição na trajetória. Se o objeto parte do repouso na posição $s = 1$ m, determine o valor absoluto da sua velocidade na posição $s = 2$ m.

(A) 12.65 m/s **(C)** 5.52 m/s **(E)** 10.26 m/s
(B) 3.16 m/s **(D)** 7.87 m/s

Resposta: ☐

13. A matriz jacobiana de um sistema não linear, num ponto P do espaço de fase (x, y), foi armazenada na variável `J` no Maxima. O comando `eigenvectors(J)` produz:
`[[[-1,1], [1,1]], [[[1,-1]], [[1,1/3]]]]`
que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto P?

(A) nó atrativo. **(D)** foco atrativo.
(B) ponto de sela. **(E)** foco repulsivo.
(C) centro.

Resposta: ☐

14. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, qual dos seguintes sistemas é um sistema de duas espécies, presa predador?

(A) $\dot{x} = y^2 - x\,y \quad \dot{y} = x^2 + x\,y$

(B) $\dot{x} = x\,y - x^2 \quad \dot{y} = y^2 - x^2$

(C) $\dot{x} = x^2 + x\,y \quad \dot{y} = y^2 - x\,y$

(D) $\dot{x} = x^2 - x\,y \quad \dot{y} = y^2 - x\,y$

(E) $\dot{x} = x^2 + x\,y \quad \dot{y} = y^2 + x\,y$

Resposta: ☐

15. Um aluno empurra um bloco de massa 400 g, sobre uma mesa horizontal, com uma aceleração constante de 1.7 m/s^2. A força que o aluno exerce é horizontal. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa é 0.4, calcule o módulo da força do aluno sobre o bloco.

(A) 5.62 N **(C)** 2.25 N **(E)** 0.89 N
(B) 22.48 N **(D)** 4.5 N

Resposta: ☐

16. Qual dos seguintes sistemas não pode ser caótico?

(A) Um sistema de 4 espécies.

(B) Um sistema autónomo com 3 variáveis de estado.

(C) Um pêndulo duplo (dois pêndulos, um pendurado no outro).

(D) Um sistema linear com 4 variáveis de estado.

(E) Um sistema autónomo com 4 variáveis de estado.

Resposta: ☐

17. As expressões para as energias cinética e potencial de um sistema conservativo com dois graus de liberdade, x e θ, são: $E_c = 3\,\dot{x}^2 + 11\,\dot{\theta}^2$ e $U = -7\,x\,\theta$. Encontre a expressão para a aceleração $\ddot{\theta}$.

(A) $\dfrac{7}{22}\,x\,\theta$ **(C)** $\dfrac{7}{22}\,\theta$ **(E)** $\dfrac{7}{3}\,x$

(B) $\dfrac{7}{22}\,x$ **(D)** $\dfrac{7}{3}\,x\,\theta$

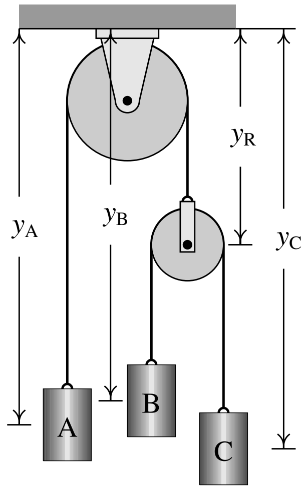
Resposta: ☐

Problemas

Problema 1. **Método 1**. Como o cilindro A se desloca para cima a 3 m/s, a roldana móvel no lado direito desce com a mesma velocidade. E como o cilindro C também desce, mas com velocidade de apenas 1 m/s, então a velocidade de C, relativa à roldana móvel é 2 m/s, para cima. Em relação à roldana móvel, o cilindro B desce com a mesma velocidade com que C está a subir; ou seja, a velocidade de B, relativa à roldana móvel, é 2 m/s, para baixo. E como a roldana móvel está a descer a 3 m/s, então o cilindro B tem velocidade de 5 m/s, para baixo.

Como o cilindro A acelera para baixo a 2 m/s^2, a aceleração da roldana móvel é também 2 m/s^2, mas para cima. E como a aceleração de C é 4 m/s^2, para cima, então a aceleração de C, relativa à roldana móvel é 2 m/s^2, para cima. A aceleração de B em relação à roldana móvel é então 2 m/s^2, para baixo, e a aceleração de B é 0.

Método 2. Outra forma de obter os mesmos resultados consiste em definir 4 variáveis y_A, y_B, y_C e y_R para medir as posições dos cilindros e da roldana móvel, tal como mostra a figura ao lado.



Como o cilindro A e a roldana móvel estão ligados por um fio, então

$$y_A + y_R = \text{constante}$$

e a ligação dos cilindros B e C com outro fio que passa pela roldana móvel implica:

$$(y_B - y_R) + (y_C - y_R) = \text{constante}$$

Derivando essas duas equações em ordem ao tempo, obtêm-se as relações para as velocidades:

$$\begin{cases} v_A + v_R = 0 \\ v_B + v_C - 2\,v_R = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad v_B = -2\,v_A - v_C$$

Como as distâncias y aumentam quando os objetos descem, então as velocidades para baixo são positivas e para cima são negativas. Assim sendo, as velocidades dadas no enunciado são $v_A = -3$ e $v_C = 1$ e a equação acima dá $v_B = 5$; ou seja, a velocidade do cilindro B é 5 m/s, para baixo.

Derivando novamente a relação entre as velocidades obtém-se a relação entre as acelerações:

$$a_B = -2\,a_A - a_C$$

e substituindo os valores dados, $a_A = 2$ e $a_C = -4$, obtém-se $a_B = 0$; ou seja, a aceleração do cilindro B é nula.

Problema 2. (*a*) **Método 1**. A energia potencial total do cilindro é a energia potencial de impulsão mais a energia potencial gravítica:

$$U = g\,\rho\,A\left(\frac{x^2}{2} - h\,x\right) + m\,g\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

e a força resultante e como não existem forças não conservativas, a força resultante sobre o cilindro é

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = g\,\rho\,A\,(h - x) - m\,g$$

e a equação de movimento obtém-se dividindo a força resultante pela massa

$$\ddot{x} = \frac{g\,\rho\,A}{m}\,(h - x) - g$$

Método 2. A equação de movimento também pode ser obtida aplicando a equação de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

onde a energia cinética é a expressão $E_c = m\dot{x}^2/2$. Calculando as derivadas obtém-se:

$$m\ddot{x} + g\,\rho\,A\,(x - h) + m\,g = 0$$

que conduz à mesma equação de movimento já obtida.

As equações de evolução são:

$$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = \frac{g\,\rho\,A}{m}\,(h - x) - g$$

(b) No ponto de equilíbrio,

$$\frac{g\,\rho\,A}{m}\,(h - x) - g = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{\mathrm{e}} = h - \frac{m}{\rho\,A}$$

e, substituindo os valores conhecidos (massas em gramas e distâncias em centímetros),

$$x_{\mathrm{e}} = 16 - \frac{144}{10} = 1.6\ \mathrm{cm}$$

(c) O sistema de equações de evolução é um sistema dinâmico linear e a matriz do sistema é:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g\,\rho\,A}{m} & 0 \end{bmatrix}$$

A soma dos valores próprios é nula ($\lambda_1 = -\lambda_2$) e o produto ($-\lambda_1^2$) é igual a $\dfrac{g\,\rho\,A}{m}$, que é positivo. Assim sendo, os dois valores próprios são:

$$\lambda = \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{g\,\rho\,A}{m}}$$

Conclui-se que o ponto de equilíbrio é um centro e as curvas de evolução são ciclos com frequência angular

$$\Omega = \sqrt{\frac{g\,\rho\,A}{m}}$$

O período de oscilação é (massas em gramas, distâncias em centímetros e tempos em segundos)

$$T = \frac{2\,\pi}{\Omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{g\,\rho\,A}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{144}{980 \times 10}} = 0.762\ \mathrm{s}$$

Observe-se que o período não depende da altura h nem da forma geométrica da base do cilindro, apenas da sua área. Imagine, por exemplo, quais poderão ser os valores da massa e da área de um barco e faça uma estimativa do seu período de oscilação.

Perguntas

3. E

4. B

5. C

6. D

7. B

8. D

9. A

10. C

11. D

12. D

13. B

14. C

15. C

16. D

17. B