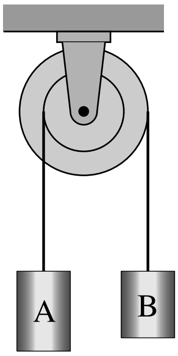
Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8$ m/s^2.

1. (4 valores) Na figura, a massa do cilindro A é 36 gramas, a massa do cilindro B é 24 gramas e o momento de inércia da roldana dupla é 4.43×10^{-7} kg·m^2. A roldana está formada por dois discos, de raios 5 cm e 8 cm, colados um ao outro. Cada cilindro está ligado a um fio com o extremo oposto ligado à roldana, de forma que o fio enrola-se ou desenrola-se, sem deslizar sobre a roldana, quando esta roda. Desprezando o atrito no eixo da roldana e a resistência do ar, determine os valores das acelerações de cada cilindro e diga se são para cima ou para baixo.



2. (4 valores) No sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = -y$$
$$\dot{y} = 10\,x + k(x + y)$$

onde k é um parâmetro real que pode ter qualquer valor entre $-\infty$ e $+\infty$, determine para quais possíveis valores de k o ponto $(x, y) = (0, 0)$ é nó atrativo ou repulsivo, foco atrativo ou repulsivo, centro ou ponto de sela.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. Um cilindro de massa m e raio R roda sobre uma superfície plana, sem derrapar. Sabendo que o momento de inércia, em relação ao centro de massa, de um cilindro é dado pela expressão $\frac{1}{2}\,m\,R^2$, determine a expressão para a energia cinética, em função da velocidade v do centro de massa.

(A) $\frac{1}{2}\,m\,v^2$ **(C)** $\frac{3}{4}\,m\,v^2$ **(E)** $m\,v^2$
(B) $\frac{1}{4}\,m\,v^2$ **(D)** $\frac{3}{2}\,m\,v^2$

Resposta: ☐

4. Um bloco de massa 4 kg desce deslizando sobre a superfície de um plano inclinado, partindo do ponto A com valor da velocidade igual a 3 m/s e parando completamente no ponto B. As alturas dos pontos A e B, medidas na vertical desde a base horizontal do plano, são: $h_B = 10$ cm e $h_A = 100$ cm. Calcule o trabalho realizado pela força de atrito, desde A até B.

(A) -41.5 J **(C)** -37.6 J **(E)** -45.4 J
(B) -49.4 J **(D)** -53.3 J

Resposta: ☐

5. O vetor posição de um ponto, em função do tempo, é dado pela expressão: $2\,t^2\,\hat{\imath} + (t^4 + 2)\,\hat{\jmath}$ (unidades SI). Calcule o ângulo entre os vetores velocidade e posição, no instante $t = 1$.

(A) 23.8° **(C)** 4.5° **(E)** 18.1°
(B) 14.7° **(D)** 11.3°

Resposta: ☐

6. Um homem empurra um bloco de madeira sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco está pousado um livro. Considerando as forças seguintes:

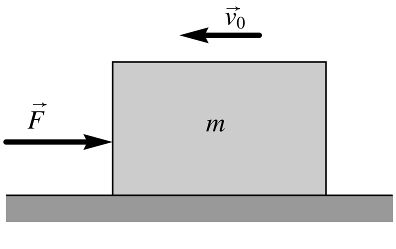
1. Força de contato entre as mãos do homem e o bloco.
2. Peso do livro.
3. Força de atrito produzida pela superfície horizontal.

Quais dessas forças atuam sobre o bloco de madeira?

(A) 2 e 3 **(C)** 1 **(E)** 1, 2 e 3
(B) 1 e 2 **(D)** 1 e 3

Resposta: ☐

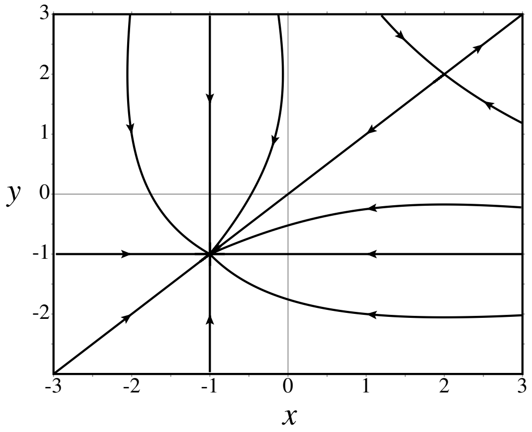
7. O bloco na figura, com massa igual a 7 kg, desloca-se para a esquerda, com velocidade inicial $\vec{v}_0$, sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco atua uma força externa $\vec{F}$, horizontal e constante, com módulo igual a 42 N. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é igual a 0.25. Calcule o módulo da aceleração do bloco.



(A) 24.85 m/s^2 **(C)** 8.45 m/s^2 **(E)** 6.0 m/s^2
(B) 59.15 m/s^2 **(D)** 3.55 m/s^2

Resposta: ☐

8. A figura mostra o retrato de fase de um sistema não linear com dois pontos de equilíbrio, em $(x, y) = (-1, -1)$ e $(x, y) = (2, 2)$. Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança do ponto $(-1, -1)$?



(A) $\dot{x} = -3\,y \quad \dot{y} = 3\,x$
(B) $\dot{x} = 3\,y \quad \dot{y} = -3\,y$
(C) $\dot{x} = 3\,x \quad \dot{y} = -3\,y$
(D) $\dot{x} = -3\,x \quad \dot{y} = -3\,y$
(E) $\dot{x} = 3\,x \quad \dot{y} = 3\,y$

Resposta: ☐

9. O espaço de fase de um sistema dinâmico é o plano xy. Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 + r^2 - 2\,r$. Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

(A) nó repulsivo
(B) nó atrativo
(C) ponto de sela
(D) foco repulsivo
(E) foco atrativo

Resposta: ☐

10. A força tangencial resultante sobre um corpo é $F_t = s(s+1)(s+2)(s-1)(s-2)$. Quantos pontos de equilíbrio instável tem este sistema mecânico?

(A) 5
(B) 4
(C) 2
(D) 3
(E) 1

Resposta: ☐

11. O espaço de fase de um sistema dinâmico é o plano xy. Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 + 2\,r^2 + r$. Quantos ciclos limite tem o sistema?

(A) 4
(B) 2
(C) 3
(D) 1
(E) 0

Resposta: ☐

12. As equações de evolução de um sistema linear são:
$$\dot{x} = -x - 4\,y \qquad \dot{y} = 4\,x - y$$
Como variam x e y em função do tempo?

(A) Oscilam com período π e amplitude crescente.
(B) Oscilam com período igual a π e amplitude constante.
(C) Oscilam com período π e amplitude decrescente.
(D) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude decrescente.
(E) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude crescente.

Resposta: ☐

13. A posição de um ponto ao longo de um percurso, em função do tempo, é dada pela expressão $s = 30\,t - 5\,t^2$ (SI). Determine a distância percorrida pelo ponto entre $t = 0$ e $t = 4.5$ s.

(A) 45 m
(B) 78.75 m
(C) 11.25 m
(D) 56.25 m
(E) 14.25 m

Resposta: ☐

14. Calcule o momento de inércia de uma esfera com raio de 2 centímetros e massa 101 gramas, que roda à volta de um eixo tangente à superfície da esfera, sabendo que o momento de inércia de uma esfera de raio R e massa m à volta do eixo que passa pelo centro é $2\,m\,R^2/5$.

(A) 1.62×10^{-5} kg·m^2
(B) 3.23×10^{-5} kg·m^2
(C) 2.89×10^{-5} kg·m^2
(D) 8.08×10^{-6} kg·m^2
(E) 5.66×10^{-5} kg·m^2

Resposta: ☐

15. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, qual dos seguintes sistemas é um sistema de duas espécies, com competição?

(A) $\dot{x} = x^2 + x\,y \quad \dot{y} = y^2 + x\,y$
(B) $\dot{x} = x\,y - x^2 \quad \dot{y} = y^2 - x^2$
(C) $\dot{x} = y^2 - x\,y \quad \dot{y} = x^2 - x\,y$
(D) $\dot{x} = y^2 - x\,y \quad \dot{y} = x^2 + x\,y$
(E) $\dot{x} = x^2 - x\,y \quad \dot{y} = y^2 - x\,y$

Resposta: ☐

16. Calcule o raio de curvatura da trajetória dum ponto, num instante em que o vetor velocidade é $5\,\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath}$ e o vetor aceleração é $-2\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath}$ (unidades SI).

(A) 16.32 m
(B) 1.9 m
(C) 25.46 m
(D) 14.15 m
(E) 2.96 m

Resposta: ☐

17. Quando se liga um PC, o disco rígido demora 1.8 s, a partir do repouso, até alcançar a velocidade normal de operação de 7200 rotações por minuto. Admitindo aceleração angular constante durante esse intervalo, determine o valor da aceleração angular

(A) 279 rad/s^2
(B) 419 rad/s^2
(C) 838 rad/s^2
(D) 209 rad/s^2
(E) 182 rad/s^2

Resposta: ☐

FEUP - MIEIC **FÍSICA 1 - EIC0010 - 2014/2015**

Resolução do exame de 26 de junho de 2015 Regente: Jaime Villate

Problemas

Problema 1. **Método 1**. Se h_A e h_B são as alturas dos dois cilindros, numa posição inicial, quando a roldana roda um ângulo θ, no sentido anti-horário, as alturas dos cilindros são:

$$y_\text{A} = h_\text{A} - 0.05\,\theta \qquad y_\text{B} = h_\text{B} + 0.08\,\theta$$

Assim sendo, o sistema tem um único grau de liberdade, que pode ser o ângulo θ. As expressões para as velocidades e acelerações dos cilindros são então:

$$v_\text{A} = -0.05\,\omega \qquad v_\text{B} = 0.08\,\omega$$
$$a_\text{A} = -0.05\,\alpha \qquad a_\text{B} = 0.08\,\alpha$$

onde $\omega = \dot{\theta}$ é a velocidade angular da roldana e $\alpha = \ddot{\theta}$ é a sua aceleração angular. A expressão para a energia cinética do sistema é:

$$E_\text{c} = \frac{0.036}{2}(-0.05\,\omega)^2 + \frac{0.024}{2}(0.08\,\omega)^2 + \frac{4.43\times10^{-7}}{2}\,\omega^2 = 1.220215\times10^{-4}\,\omega^2$$

E a energia potencial gravítica, ignorando termos constantes, é:

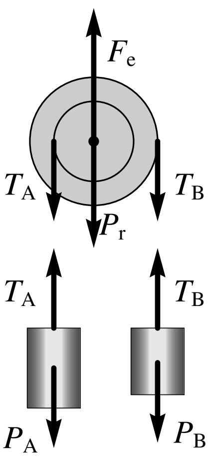
$$U = -0.036\times9.8\times0.05\,\theta + 0.024\times9.8\times0.08\,\theta = 1.176\times10^{-3}\,\theta$$

Aplicando a equação de Lagrange, obtém-se a aceleração angular:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\text{c}}{\partial\omega}\right) - \frac{\partial E_\text{c}}{\partial\theta} + \frac{\partial U}{\partial\theta} = 2.44043\times10^{-4}\,\alpha - 0 + 1.176\times10^{-3} = 0 \qquad\Longrightarrow\qquad \alpha = -4.8188$$

O sinal negativo indica que a roldana acelera no sentido horário. Como tal, a aceleração do bloco A é para cima e a do bloco B é para baixo, e os seus valores absolutos são:

$$a_\text{A} = 0.05\times4.8188 = 0.2409\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \qquad a_\text{B} = 0.08\times4.8188 = 0.3855\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$



Método 2. A figura ao lado mostra os diagramas de corpo livre para a roldana e para cada um dos cilindros. Admitindo que a aceleração a_A do cilindro A é para cima, então a aceleração a_B do cilindro B é para baixo e a aceleração angular α da roldana é no sentido horário. As três equações de movimento são:

$$T_\text{A} - 0.036\times9.8 = 0.036\,a_\text{A}$$
$$0.024\times9.8 - T_\text{B} = 0.024\,a_\text{B}$$
$$0.08\,T_\text{B} - 0.05\,T_\text{A} = 4.43\times10^{-7}\,\alpha$$

junto com as duas equações:

$$a_\text{A} = 0.05\,\alpha \qquad a_\text{B} = 0.08\,\alpha$$

tem-se um sistema de 5 equações lineares com 5 incógnitas, T_A, T_B, α, a_A e a_B. A solução desse sistema dá os mesmos valores já encontrados no método 1 para a_A e a_B, com sinais positivos, que indica que o sentido arbitrado para as acelerações foi o correto.

Problema 2. Existem várias formas possíveis de resolver este problema; um método simples é o seguinte. Trata-se de um sistema linear com matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10+k & k \end{bmatrix}$$

com traço, t, e determinante, d;

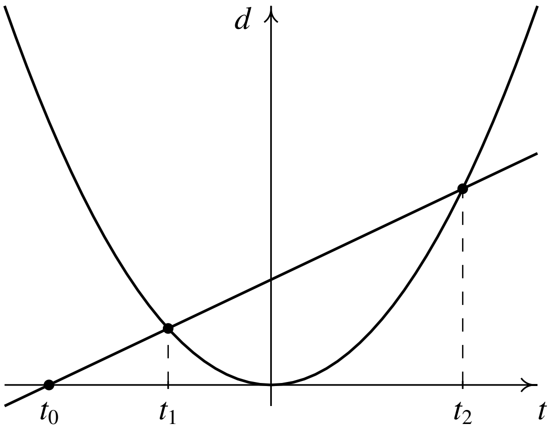
$$t = k \qquad d = k + 10$$

A relação entre o traço e o determinante é $d = t + 10$. Num plano em que o eixo das abcissas representa o traço t e o eixo das ordenadas representa o determinante d, esta relação é uma reta com declive igual a 1, que corta o eixo das abcissas em $t_0 = -10$.

A curva que delimita a região dos focos da região dos nós é a parábola $d = t^2/4$, que corta a reta $d = t + 10$ nos dois pontos onde:

$$\frac{t^2}{2} - 2t - 20 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 2 \pm \sqrt{44} \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 2 - 2\sqrt{11} \approx -4.633 \qquad t_2 = 2 + 2\sqrt{11} \approx 8.633$$

O gráfico seguinte mostra a reta e a parábola:



O ponto de equilíbrio é ponto de sela, se o traço for menor que t_0, nó atrativo, se o traço estiver entre t_0 e t_1, foco atrativo, se o traço estiver entre t_1 e 0, centro se o traço for nulo, foco repulsivo, se o traço estiver entre 0 e t_2 ou nó repulsivo, se o traço for maior que t_2. Tendo em conta que k é igual ao traço, o resultado é então:

- Ponto de sela, se $k < -10$
- Nó atrativo, se $-10 < k \leq 2 - 2\sqrt{11}$
- Foco atrativo, se $2 - 2\sqrt{11} < k < 0$
- Centro, se $k = 0$
- Foco repulsivo, se $0 < k < 2 + 2\sqrt{11}$
- Nó repulsivo, se $k \geq 2 + 2\sqrt{11}$

Note-se que quando $k = -10$, o ponto de equilíbrio é não-hiperbólico, que não corresponde a nenhuma das categorias acima. Quando $k = 2 \pm 2\sqrt{11}$, o ponto é nó impróprio, que já foi incluído nas categorias acima.

Perguntas

3. C
4. D
5. D
6. D
7. C
8. D
9. E
10. D
11. E
12. D
13. D
14. E
15. E
16. A
17. B