U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

MESTRADO INTEGRADO EM ENG. INFORMÁTICA E COMPUTAÇÃO 2014/2015

EIC0010 — FÍSICA I — 1º ANO, 2º SEMESTRE 14 de julho de 2015

Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8\ \text{m/s}^2$.

1. (4 pontos) Um homem com 72 kg empurra uma caixa de madeira com 8 kg sobre um chão horizontal, exercendo uma força horizontal nela que a faz deslizar no chão. Sobre a caixa está pousado um livro com 0.6 kg. O homem, a caixa e o livro deslocam-se conjuntamente, com aceleração igual a $0.5\ \text{m/s}^2$. Determine o valor das forças de atrito entre o chão e a caixa, entre a caixa e o livro e entre o chão e os pés do homem, ignorando a resistência do ar e sabendo que os coeficientes de atrito estático (μ_e) e atrito cinético (μ_c) são: entre o chão e a caixa, $\mu_\text{e} = 0.25$ e $\mu_\text{c} = 0.2$; entre a caixa e o livro, $\mu_\text{e} = 0.35$ e $\mu_\text{c} = 0.28$; entre o chão e os pés do homem, $\mu_\text{e} = 0.4$ e $\mu_\text{c} = 0.3$.

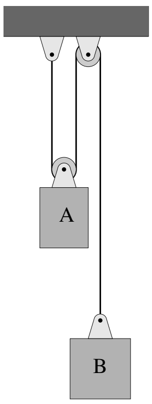
2. (4 pontos) O sistema dinâmico:

$$\dot{x} = y + x\,(x^2 + y^2) \qquad\qquad \dot{y} = -x + y\,(x^2 + y^2)$$

tem um ponto de equilíbrio na origem. Use as substituições $x = r\,\cos\theta$, $y = r\,\sin\theta$ para transformar as equações de evolução para coordenadas polares. Encontre as expressões para $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$ em função de r e θ. Explique (con argumentos válidos) que tipo de ponto de equilíbrio é a origem e quantos ciclos limite existem.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. No instante em que o bloco B desce com velocidade 18 cm/s, com que velocidade se desloca o bloco A para cima?



(A) 36 cm/s **(C)** 54 cm/s **(E)** 9 cm/s
(B) 6 cm/s **(D)** 18 cm/s

Resposta: ☐

4. A força resultante sobre um objeto de massa 2 kg é $\vec{F} = 7\,\hat{\imath} + 5\,t\,\hat{\jmath}$ (SI). Se a velocidade do objeto em $t = 0$ for $3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}$ m/s, calcule a velocidade em $t = 6$ s.

(A) $21.0\,\hat{\imath} + 45.0\,\hat{\jmath}$ **(D)** $45.0\,\hat{\imath} + 94.0\,\hat{\jmath}$
(B) $24.0\,\hat{\imath} + 19.0\,\hat{\jmath}$ **(E)** $24.0\,\hat{\imath} + 49.0\,\hat{\jmath}$
(C) $24.0\,\hat{\imath} + 45.0\,\hat{\jmath}$

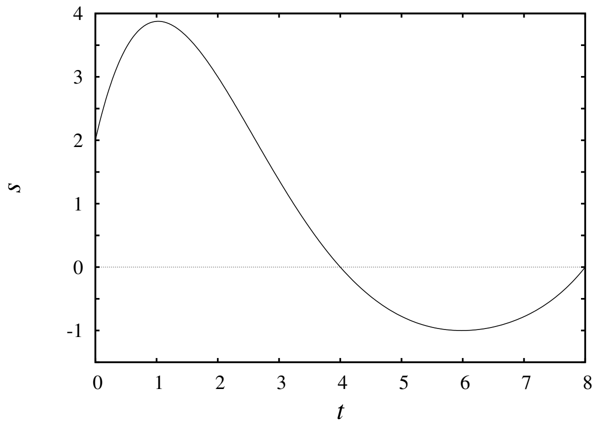
Resposta: ☐

5. Um primeiro cilindro, com massa 30 g, fica em equilíbrio a uma altura de 40 cm quando é pendurado de uma mola vertical. Substituindo o primeiro cilindro por outro de massa 31 g, este fica em equilíbrio a uma altura de 34 cm. Determine o valor da constante elástica da mola.

(A) 17 mN/m **(C)** 82 mN/m **(E)** 33 mN/m
(B) 163 mN/m **(D)** 327 mN/m

Resposta: ☐

6. A figura mostra o gráfico da posição de um ponto ao longo da sua trajetória em função do tempo. Se a_1 e a_6 representam a aceleração tangencial nos dois instantes $t = 1$ e $t = 6$, qual das afirmações é correta?



(A) $a_1 > 0,\ a_6 > 0$ **(D)** $a_1 = 0,\ a_6 = 0$
(B) $a_1 < 0,\ a_6 > 0$ **(E)** $a_1 > 0,\ a_6 < 0$
(C) $a_1 < 0,\ a_6 < 0$

Resposta: ☐

7. A componente tangencial da força resultante sobre uma partícula de massa 2 (unidades SI) é dada pela expressão $4\,s + 7\,v$, onde s é a posição na trajetória e v o valor da velocidade. Qual das matrizes na lista é a matriz do respetivo sistema dinâmico linear?

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7/2 \end{bmatrix}$ **(D)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ **(E)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7/2 & 2 \end{bmatrix}$

Resposta: ☐

8. A aceleração tangencial de um objeto verifica a expressão $a_\mathrm{t} = 4\,s^2$ (unidades SI), em que s é a posição na trajetória. Se o objeto parte do repouso em $s = 1$ m, determine o valor absoluto da sua velocidade em $s = 2$ m.

(A) 3.57 m/s **(C)** 4.99 m/s **(E)** 4.32 m/s
(B) 5.66 m/s **(D)** 2.83 m/s

Resposta: ☐

9. Um piloto de corridas de aviões, com 100 kg, executa um loop vertical de 400 m de raio, com velocidade constante em módulo. Sabendo que a força vertical exercida no piloto pela base do assento do avião é igual a 2450 N, no ponto mais baixo do loop, calcule a mesma força no ponto mais alto do loop.

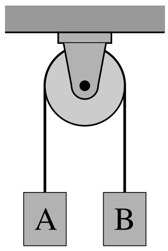
(A) 2450 N **(C)** 1470 N **(E)** 490 N
(B) 980 N **(D)** 245 N

Resposta: ☐

10. Numa máquina de Atwood penduram-se dois blocos A e B nos extremos de um fio que passa por uma roldana; o bloco A, mais pesado, desce com aceleração constante e o bloco B, mais leve, sobe com o mesmo valor da aceleração. Considerando as forças seguintes:

1. Força de contacto no eixo da roldana.
2. Peso do bloco A.
3. Peso do bloco B.

Quais dessas forças atuam sobre a roldana?



(A) 1 e 2 **(C)** 1 **(E)** 2 e 3
(B) 1 e 3 **(D)** 1, 2 e 3

Resposta: ☐

11. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado tem um único ponto de equilíbrio na origem e um ciclo limite. Qual poderá ser a matriz jacobiana do sistema na origem?

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **(C)** $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(E)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **(D)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Resposta: ☐

12. O momento de inércia de um cilindro de massa m, raio R e densidade constante, em relação ao seu eixo, é $m\,R^2/2$. Quando esse cilindro roda sem derrapar num plano inclinado de altura h, partindo do repouso, chega ao fim do plano com velocidade $2\sqrt{\dfrac{g\,h}{3}}$. Um segundo cilindro, com o mesmo raio e massa mas densidade que depende da distância ao eixo, atinge uma velocidade $\sqrt{\dfrac{10\,g\,h}{7}}$ no mesmo plano inclinado, partindo do repouso e rodando sem derrapar. Qual é a expressão do momento de inércia do segundo cilindro, em relação ao seu eixo?

(A) $\dfrac{2}{5}\,m\,R^2$ **(C)** $\dfrac{3}{4}\,m\,R^2$ **(E)** $\dfrac{1}{3}\,m\,R^2$
(B) $\dfrac{3}{5}\,m\,R^2$ **(D)** $\dfrac{2}{3}\,m\,R^2$

Resposta: ☐

13. Qual das seguintes equações podera ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

(A) $\dot{y} = x + x\,y^2$ **(D)** $\dot{y} = 2\,y^2 - 3\,y$
(B) $\dot{y} = 2\,y - 5\,y^2$ **(E)** $\dot{y} = -5\,x\,y + 2\,y$
(C) $\dot{y} = 6\,y - y^2$

Resposta: ☐

14. A equação diferencial:
$$\ddot{x} - x^2 - 3\,x - 2 = 0$$
é equivalente a um sistema dinâmico com espaço de fase $(x,\,\dot{x})$. Qual dos pontos na lista é um ponto de equilíbrio do sistema?

(A) (1, 0) **(C)** (−3, 0) **(E)** (3, 0)
(B) (0, 0) **(D)** (−1, 0)

Resposta: ☐

15. Lança-se um projétil desde uma janela a 4.2 m de altura, com velocidade de 14 m/s, inclinada 30° por cima da horizontal. Desprezando a resistência do ar, calcule a altura máxima atingida pelo projétil.

(A) 14.2 m **(C)** 6.7 m **(E)** 9.2 m
(B) 5.5 m **(D)** 11.7 m

Resposta: ☐

16. Calcule o valor da componente tangencial da aceleração dum ponto, num instante em que o vetor velocidade é $2\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}$ e o vetor aceleração é $-5\,\hat{\imath} + 8\,\hat{\jmath}$ (unidades SI).

(A) 22.0 m/s^2 **(C)** 9.39 m/s^2 **(E)** 8.05 m/s^2
(B) 36.0 m/s^2 **(D)** 4.92 m/s^2

Resposta: ☐

17. Num sistema que se desloca no eixo dos x, a força resultante é $x^2 + x - 2$. Na lista seguinte, qual dos valores corresponde à posição x dum ponto de equilíbrio instável?

(A) -1 **(C)** -2 **(E)** 2
(B) 3 **(D)** 1

Resposta: ☐

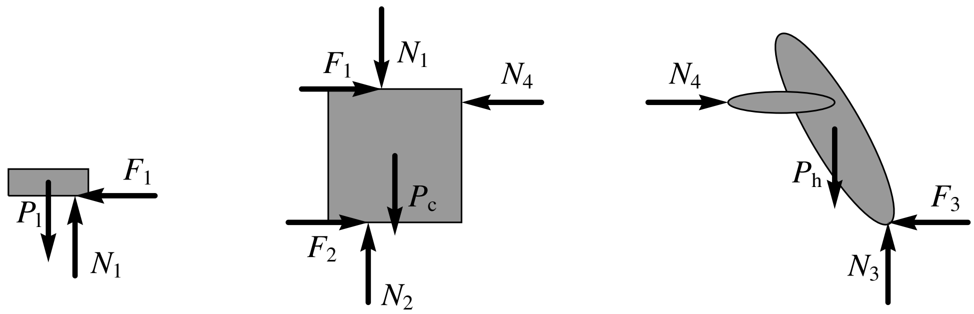
Resolução do exame de 14 de julho de 2015 Regente: Jaime Villate

Problema 1. Existem quatro pontos de contacto entre corpos rígidos:

1. Entre a base do livro e a tampa da caixa.
2. Entre a base da caixa e o chão.
3. Entre os pés do homem e o chão.
4. Entre as mãos do homem e a parede lateral direita da caixa (admitindo que está a ser empurrada para a esquerda).

Em 1 há reação normal, N_1, vertical, e força horizontal, F_1, de atrito estático porque o livro não está a deslizar sobre a caixa. Em 2 há força de reação normal, N_2, vertical, e força horizontal, F_2, de atrito cinético, porque a caixa desliza sobre o chão. Em 3 há reação normal, N_3, vertical, e força horizontal, F_3, de atrito estático porque os pés do homem não derrapam sobre o chão (se derrapassem, a caixa não acelerava). Em 4 há apenas reação normal, N_4, porque o enunciado diz que a força que o homem exerce na caixa é horizontal.

A figura seguinte mostra os diagramas de corpo livre do livro, da caixa e do homem.



A força de atrito estático F_1 deve atuar sobre o livro de direita para esquerda, para que o livro acelere para a esquerda. O mesmo acontece com a força de atrito estático F_3 atuando no homem. Essas duas forças não podem ultrapassar o valor máximo, $\mu_e N$, mas podem ter qualquer valor entre 0 e esse valor máximo. A força de atrito cinético F_2 é no sentido oposto ao movimento da caixa e tem módulo igual a $F_2 = \mu_c N_2 = 0.2 N_2$. Os pesos do livro, da caixa e do homem são: $P_l = 5.88$ N, $P_c = 78.4$ N e $P_h = 705.6$ N.

As duas equações de movimento de translação do livro são (unidades SI):

$$N_1 = 5.88$$
$$F_1 = m_l\, a = 0.6 \times 0.5 = 0.3$$

As equações de movimento de translação da caixa são:

$$N_2 = 78.4 + N_1 = 84.28$$
$$N_4 - F_1 - F_2 = m_c\, a \qquad \Longrightarrow \qquad N_4 = 8 \times 0.5 + 0.3 + 0.2 \times 84.28 = 21.156$$

E as equações de movimento de translação do homem são:

$$N_3 = 705.6$$
$$F_3 - N_4 = m_h\, a \qquad \Longrightarrow \qquad F_3 = 72 \times 0.5 + 21.156 = 57.156$$

O valor máximo que pode ter F_1 é $0.35\,N_1 = 2.058$ e o valor máximo possível de F_3 é $0.4\,N_3 = 282.24$. Como os resultados obtidos não ultrapassam esses valores máximos, esses resultados são válidos e a resposta é: a força de atrito entre a caixa e o livro é 0.3 N, a força de atrito entre a caixa e o chão é $0.2 \times 84.28 = 16.856$ N e a força de atrito entre o chão e os pés do homem é 57.156 N.

Problema 2. As derivadas das expressões $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ são:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\,\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\,\dot{\theta}\cos\theta$$

Substituindo nas equações de evolução, obtém-se as equações de evolução em coordenadas polares:

$$\dot{r}\cos\theta - r\,\dot{\theta}\sin\theta = r\sin\theta + r^3\cos\theta$$
$$\dot{r}\sin\theta + r\,\dot{\theta}\cos\theta = -r\cos\theta + r^3\sin\theta$$

que são duas equações lineares para $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$. Aplicando qualquer método de resolução de equações lineares, obtém-se essas duas expressões. Por exemplo, o método de eliminação; multiplicando a primeira equação por $\cos\theta$ e a segunda por $\sin\theta$,

$$\dot{r}\cos^2\theta - r\,\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = r\sin\theta\cos\theta + r^3\cos^2\theta$$
$$\dot{r}\sin^2\theta + r\,\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = -r\sin\theta\cos\theta + r^3\sin^2\theta$$

e somando as duas equações obtêm-se a expressão para $\dot{r}$

$$\dot{r} = r^3$$

Multiplicando a primeira equação de evolução por $\sin\theta$ e a segunda por $\cos\theta$,

$$\dot{r}\sin\theta\cos\theta - r\,\dot{\theta}\sin^2\theta = r\sin^2\theta + r^3\sin\theta\cos\theta$$
$$\dot{r}\sin\theta\cos\theta + r\,\dot{\theta}\cos^2\theta = -r\cos^2\theta + r^3\sin\theta\cos\theta$$

e subtraindo a primeira equação da segunda obtêm-se a expressão para $\dot{\theta}$

$$r\,\dot{\theta} = -r \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\theta} = -1 \quad (\text{se: } r \neq 0)$$

Fora da origem, r é positiva e, como tal, $\dot{r} = r^3$ é sempre positiva. Ou seja, o estado do sistema afasta-se sempre da origem (r aumenta). Enquanto o estado se afasta da origem, dá várias voltas no sentido negativo (sentido dos ponteiros do relógio), porque $\dot{\theta}$ é igual a -1. Isso implica que a origem é um foco repulsivo e não existe nenhum ciclo limite.

As expressões para $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$ também podem ser obtidas no Maxima com os seguintes comandos:

```
(%i1) x: r*cos(q)$
(%i2) y: r*sin(q)$
(%i3) gradef(r,t,v)$
(%i4) gradef(q,t,w)$
(%i5) e1: diff(x,t) = y+(x^2+y^2)*x;
```

$$(\%o5) \quad \cos(q)\,v - \sin(q)\,r\,w = \cos(q)\,r\left(\sin^2(q)\,r^2 + \cos^2(q)\,r^2\right) + \sin(q)\,r$$

```
(%i6) e2: diff(y,t) = -x+(x^2+y^2)*y;
```

$$(\%o6) \quad \cos(q)\,r\,w + \sin(q)\,v = \sin(q)\,r\left(\sin^2(q)\,r^2 + \cos^2(q)\,r^2\right) - \cos(q)\,r$$

```
(%i7) trigsimp(solve([e1,e2],[v,w]));
```

$$(\%o7) \quad [\,[\,v = r^3\,,\; w = -1\,]\,]$$

Perguntas

3. E	**6.** B	**9.** E	**12.** A	**15.** C
4. E	**7.** A	**10.** C	**13.** E	**16.** D
5. B	**8.** E	**11.** E	**14.** D	**17.** D