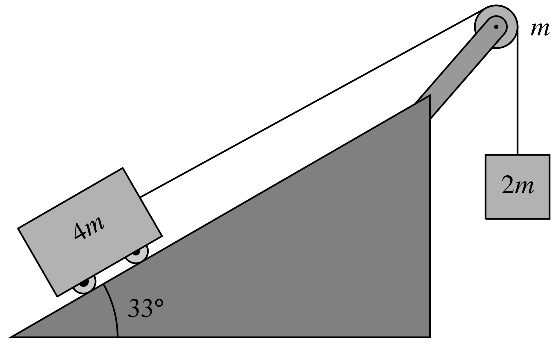
Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8$ m/s^2.

1. (4 valores) Um bloco de massa $2\,m$ está pendurado por um fio vertical que está ligado no outro extremo a um carrinho de massa $4\,m$, passando por uma roldana de massa m, onde $m = 100$ g. O carrinho encontra-se na superfície de um plano inclinado 33° em relação à horizontal e a roldana é um disco homogéneo de raio R (momento de inércia $I_{\text{cm}} = m\,R^2/2$). A massa do fio e das rodas do carrinho são desprezáveis. O fio faz rodar a roldana, sem deslizar sobre ela. Determine o valor da aceleração do carrinho, ignorando as forças não conservativas (resistência do ar e atrito nos eixos das rodas e da roldana) e o sentido dessa aceleração (para cima ou para baixo do plano inclinado?).



2. (4 valores) Determine a posição dos pontos de equilíbrio e o tipo de cada um desses pontos, no sistema dinâmico com as seguintes equações de evolução:

$$\dot{x} = y^3 - 4\,x \qquad \dot{y} = y^3 - y - 3\,x$$

Diga se o sistema corresponde ou não às seguintes categorias de sistemas: (a) autónomo, (b) linear, (c) conservativo, (d) pedador presa (todas as suas respostas devem ser argumentadas corretamente).

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. O sistema de Lotka-Volterra consegue explicar muito bem a evolução de um sistema predador presa mas tem uma grande desvantagem que outros sistemas tentam corrigir. Qual é essa desvantagem?

(A) Cada uma das populações pode aumentar indefinidamente.
(B) Nenhuma das duas populações atinge nunca um valor constante.
(C) Nenhuma das duas populações pode chegar a extinguir-se totalmente.
(D) Cada uma das populações oscila indefinidamente.
(E) Cada uma das populações pode oscilar entre um valor muito baixo e um valor muito elevado.

Resposta: ☐

4. Determine o valor da componente normal da aceleração dum ponto, no instante em que o seu vetor velocidade é $3\,\hat{\imath} + 6\,\hat{\jmath}$ e o vetor aceleração é $-5\,\hat{\imath} + 6\,\hat{\jmath}$ (unidades SI).

(A) 7.6 m/s^2 **(B)** 3.13 m/s^2 **(C)** 21.0 m/s^2 **(D)** 7.16 m/s^2 **(E)** 48.0 m/s^2

Resposta: ☐

5. As equações dum sistema dinâmico com variáveis de estado (x, y) foram transformadas para coordenadas polares (r, θ), obtendo-se as equações: $\dot{\theta} = -2 \quad \dot{r} = 3\,r - r^2$
Como tal, conclui-se que o sistema tem um ciclo limite:

(A) atrativo com $r = 2$
(B) repulsivo com $r = 2$
(C) atrativo com $r = 0$
(D) atrativo com $r = 3$
(E) repulsivo com $r = 3$

Resposta: ☐

6. Um corpo de 18 kg desloca-se ao longo do eixo dos x. A força resultante sobre o corpo é conservativa, com energia potencial dada pela expressão $3 + 5\,x^2$ (SI). Se o corpo passa pela origem com velocidade $9\,\hat{\imath}$, com que energia cinética chegará ao ponto $x = 7$ m?

(A) 2420.0 J **(B)** 1210.0 J **(C)** 145.2 J **(D)** 484.0 J **(E)** 4114.0 J

Resposta: ☐

7. Aplica-se uma força $5\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}$ num ponto com vetor posição $4\,\hat{\imath} - 1\,\hat{\jmath}$ (unidades SI). Determine o módulo do momento dessa força, em relação à origem.

(A) 33 N·m **(B)** 21 N·m **(C)** 16 N·m **(D)** 24 N·m **(E)** 11 N·m

Resposta: ☐

8. A matriz dum sistema dinâmico linear é (unidades SI):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Como é a evolução das variáveis de estado em função do tempo?

(A) Oscilam com período π e amplitude decrescente.
(B) Oscilam com período igual a π e amplitude constante.
(C) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude constante.
(D) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude decrescente.
(E) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude crescente.

Resposta: ☐

9. Uma partícula desloca-se numa trajetória circular sob a ação duma força tangencial resultante $F_t = 3\cos(\theta)$, onde θ é o ângulo medido ao longo do círculo. Qual dos valores de θ na lista seguinte corresponde a um ponto de equilíbrio instável?

(A) $\pi/2$ **(C)** 0 **(E)** $3\pi/2$
(B) 2π **(D)** π

Resposta: ☐

10. A projeção x da aceleração duma partícula aumenta em função do tempo, de acordo com a expressão $a_x = 3\,t$ (unidades SI). No instante $t = 0$ a projeção x da velocidade é nula e a componente da posição é $x = 4$ m. Determine a projeção x da posição em $t = 6$ s.

(A) 112.0 m **(C)** 56.0 m **(E)** 336.0 m
(B) 694.4 m **(D)** 280.0 m

Resposta: ☐

11. Uma partícula de massa m desloca-se ao longo da curva $y = x^2/2$, no plano horizontal xy. Assim sendo, basta uma única variável generalizada para descrever o movimento; escolhendo a variável x, a expressão da energia cinética é $E_c = \dfrac{m\,\dot{x}^2}{2}\left(1 + x^2\right)$. Encontre a expressão para a força generalizada Q_x responsável pelo movimento da partícula.

(A) $m\,\ddot{x}\left(1 + x^2\right) + 2\,m\,x\,\dot{x}$

(B) $\dfrac{m\,\ddot{x}}{2}\left(1 + x^2\right) + 1\,m\,x\,\dot{x}^2$

(C) $\dfrac{m\,\ddot{x}}{2}\left(1 + x^2\right) - 2\,m\,x^3\,\dot{x}^2$

(D) $\dfrac{m\,\ddot{x}}{2}\left(1 + x^2\right) - 2\,m\,x\,\dot{x}$

(E) $m\,\ddot{x}\left(1 + x^2\right) + 1\,m\,x\,\dot{x}^2$

Resposta: ☐

12. O vetor velocidade do objeto 1, em função do tempo, é: $\vec{v}_1 = (1 - 6\,t)\,\hat{\imath} + 8\,t\,\hat{\jmath}$ (unidades SI) e o vetor velocidade do objeto 2, no mesmo referencial, é: $\vec{v}_2 = 3\,t\,\hat{\imath} + (1 - 5\,t)\,\hat{\jmath}$. Determine o vetor aceleração do objeto 1 em relação ao objeto 2.

(A) $3\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath}$ **(D)** $9\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath}$
(B) $9\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath}$ **(E)** $-3\,\hat{\imath} + 13\,\hat{\jmath}$
(C) $-9\,\hat{\imath} + 13\,\hat{\jmath}$

Resposta: ☐

13. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, qual dos seguintes sistemas é um sistema de duas espécies com competição?

(A) $\dot{x} = x^2 + x\,y \quad \dot{y} = y^2 + x\,y$
(B) $\dot{x} = y^2 - x\,y \quad \dot{y} = x^2 - x\,y$
(C) $\dot{x} = x^2 - x\,y \quad \dot{y} = y^2 - x\,y$
(D) $\dot{x} = x\,y - x^2 \quad \dot{y} = y^2 - x^2$
(E) $\dot{x} = y^2 - x\,y \quad \dot{y} = x^2 + x\,y$

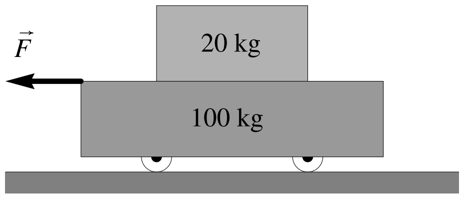
Resposta: ☐

14. O vetor velocidade duma partícula, em função do tempo, é: $2\,t^2\,\hat{\imath} + 2\,t^3\,\hat{\jmath}$ (unidades SI). Encontre a expressão para o módulo da aceleração.

(A) $6\,t^2$ **(D)** $\sqrt{36\,t^4 + 16\,t^2}$
(B) $4\,t$ **(E)** $6\,t^2 + 4\,t$
(C) $\sqrt{6\,t^2 + 4\,t}$

Resposta: ☐

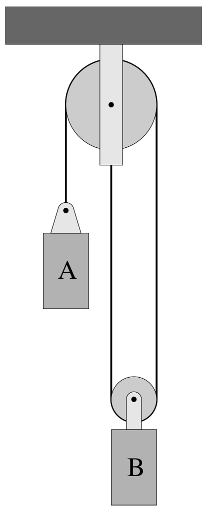
15. A força $\vec{F}$, com módulo de 54 N, faz acelerar os dois blocos na figura, sobre uma mesa horizontal, sem que o bloco de cima deslize em relação ao outro bloco. As forças de atrito nas rodas podem ser desprezadas. Calcule o módulo da força de atrito entre os dois blocos.



(A) 8 N **(C)** 9 N **(E)** 7 N
(B) 5 N **(D)** 6 N

Resposta: ☐

16. Na figura, a roldana fixa tem raio de 6 cm, a roldana móvel tem raio de 3 cm e o fio faz rodar as roldanas sem deslizar sobre elas. No instante em que o bloco A desce, com velocidade de valor 18 cm/s, qual o valor da velocidade angular da roldana móvel?



(A) 12 rad/s **(C)** 6 rad/s **(E)** 3 rad/s
(B) 18 rad/s **(D)** 9 rad/s

Resposta: ☐

17. A equação diferencial:

$$\ddot{x} - x^2 + x + 6 = 0$$

é equivalente a um sistema dinâmico com espaço de fase $(x, \dot{x})$. Qual dos pontos na lista é ponto de equilíbrio desse sistema?

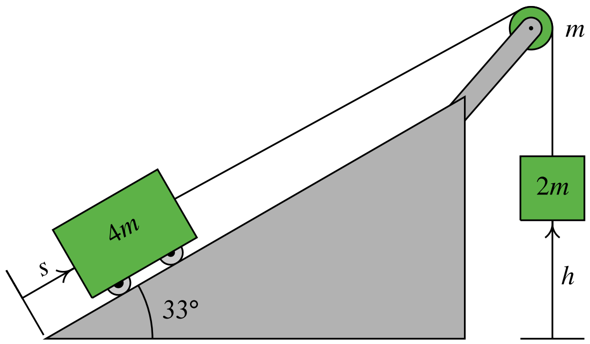
(A) $(-3,\,0)$ **(C)** $(1,\,0)$ **(E)** $(0,\,0)$
(B) $(-1,\,0)$ **(D)** $(3,\,0)$

Resposta: ☐

FEUP - MIEIC **FÍSICA 1 - EIC0010 - 2015/2016**

Resolução do exame de 21 de junho de 2016 Regente: Jaime Villate

Problema 1. Para descrever o movimento do sistema são necessárias três variáveis. Duas variáveis s e h, para determinar as posições do carrinho e do bloco, que podem ser definidas como mostra a figura seguinte, e um ângulo θ que determina a rotação da roldana.



Como o fio faz rodar a roldana sem deslizar nela, o ângulo que a roldana roda (no sentido dos ponteiros do relógio) está relacionado com a posição do carrinho: $\theta = s/R + \text{constante}$ e, como tal, a velocidade angular da roldana é:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

onde $v = \dot{s}$ é a velocidade do carrinho. O comprimento do fio é igual a

$$L = \text{constante} - s - h$$

e, como permanece constante, a velocidade do bloco é igual a menos a velocidade do carrinho:

$$\dot{h} = -v$$

Assim sendo, o sistema tem um único grau de liberdade, s, e uma única velocidade generalizada, v.

Resolução por mecânica de Lagrange. A expressão da energia cinética total dos três objetos é:

$$E_\text{c} = \frac{1}{2}(4m)\,\dot{s}^2 + \frac{1}{2}(2m)\,\dot{h}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}\right)\omega^2 = 2mv^2 + mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{13}{4}mv^2$$

E a expressão da energia potencial gravítica (ignorando a da roldana que permanece constante) é:

$$U = 4mgs\,\sin(33^\circ) + 2mgh = 4mgs\,\sin(33^\circ) - 2mgs + \text{constante}$$

A equação de movimento obtém-se a partir da equação de Lagrange:

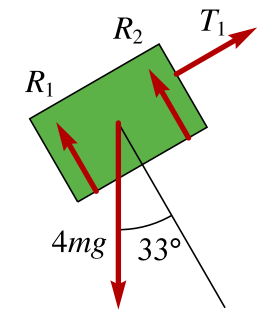
$$\frac{\text{d}}{\text{d}t}\left(\frac{\partial E_\text{c}}{\partial v}\right) - \frac{\partial E_\text{c}}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{13}{2}ma + 4mg\,\sin(33^\circ) - 2mg = 0$$

E a aceleração do carrinho é então,

$$a = \frac{4g}{13}\,(1 - 2\,\sin(33^\circ)) = -0.2692\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

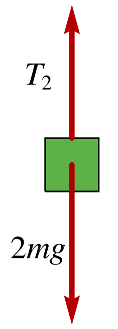
O sinal negativo indica que a aceleração é para baixo do plano inclinado (a velocidade do carrinho, v, é uma variável de estado que pode ser positiva ou negativa, ou seja, para cima ou para baixo).

Resolução por mecânica vetorial. A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre do carrinho. A soma das componentes das forças normais ao plano deve ser nula e a soma das componentes das forças tangentes ao plano é igual a:



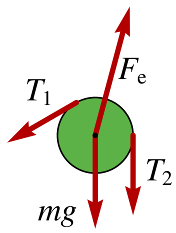
$$T_1 - 4mg\sin(33°) = 4ma \quad \Longrightarrow \quad T_1 = 4m(a + g\sin(33°)) \tag{1}$$

A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre do bloco. Como na equação do carrinho admitiu-se que a aceleração a era para cima do plano, então a aceleração do bloco é a, para baixo, e a equação de movimento é:



$$2mg - T_2 = 2ma \quad \Longrightarrow \quad T_2 = 2m(g - a) \tag{2}$$

Na roldana atuam as tensões nos dois lados do fio, o seu peso e uma força de contato no eixo (diagrama ao lado). A soma dessas forças deve ser nula e a soma dos momentos, em relação ao eixo, é:



$$T_2 R - T_1 R = \left(\frac{mR^2}{2}\right)\alpha \quad \Longrightarrow \quad T_2 - T_1 = \frac{m}{2}a$$

Substituindo nesta expressão as equações (**??**) e (**??**), obtém-se a mesma expressão da aceleração obtida pelo método de mecânica de Lagrange.

Problema 2. Os pontos de equilíbrio são as soluções das duas equações:

$$y^3 - 4x = 0 \qquad\qquad y^3 - y - 3x = 0$$

Subtraindo as duas equações obtém-se $y = x$, ou seja,

$$x^3 - 4x = x\left(x^2 - 4\right) = x(x+2)(x-2) = 0$$

Como tal, há três pontos de equilíbrio (x, y):

$$\mathrm{P}_1 = (0,0) \qquad \mathrm{P}_2 = (2,2) \qquad \mathrm{P}_3 = (-2,-2)$$

Derivando as duas expressões das equações de evolução, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -4 & 3y^2 \\ -3 & 3y^2 - 1 \end{bmatrix}$$

No ponto P_1, a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

que tem valores próprios -4 e -1 e, como tal, P_1 é um nó atrativo.

Nos pontos P_2 e P_3 obtém-se a mesma matriz para a aproximação linear,

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$$

Que tem determinante igual a -8. Conclui-se então que P_2 e P_3 são ambos pontos de sela.

(a) O sistema é autónomo, porque as expressões das equações de evolução não dependem explicitamente do tempo. (b) Não é um sistema linear, porque a matriz jacobiana não é constante. (c) Não é sistema conservativo, porque o traço da matriz jacobiana, igual a $3y^2 - 5$, não é nulo. (d) Não pode ser sistema predador presa, porque não é um sistema de duas espécias, já que $y^3 - 4x$ não se aproxima de zero quando x se aproxima de zero e $y^3 - y - 3x$ não se aproxima de zero quando y se aproxima de zero.

Perguntas

3. E	**6.** D	**9.** E	**12.** C	**15.** C
4. D	**7.** B	**10.** A	**13.** C	**16.** E
5. D	**8.** C	**11.** E	**14.** D	**17.** D

Critérios de avaliação

Problema 1

Mecânica de Lagrange.

- Determinação do grau de liberdade e relações entre as velocidades e acelerações ________ 0.8
- Expressão para a energia cinética do sistema ________ 0.8
- Expressão para a energia potencial do sistema ________ 0.8
- Aplicação da equação de Lagrange para obter a equação de movimento ________ 0.8
- Valor da aceleração do carrinho, com unidades corretas ________ 0.4
- Indicação do sentido da aceleração do carrinho ________ 0.4

Mecânica vetorial.

- Determinação do grau de liberdade e relações entre as velocidades e acelerações ________ 0.8
- Diagrama de corpo libre e equação de movimento do carrinho ________ 0.8
- Diagrama de corpo libre e equação de movimento do bloco ________ 0.8
- Diagrama de corpo libre e equação de movimento da roldana ________ 0.8
- Valor da aceleração do carrinho, com unidades corretas ________ 0.4
- Indicação do sentido da aceleração do carrinho ________ 0.4

Problema 2

- Determinação dos 3 pontos de equilíbrio ________ 0.4
- Obtenção da matriz jacobiana ________ 0.4
- Caraterização do ponto de equilíbrio na origem ________ 0.4
- Caraterização dos dois pontos de equilíbrio fora da origem ________ 0.4
- Alínea *a* ________ 0.6
- Alínea *b* ________ 0.6
- Alínea *c* ________ 0.6
- Alínea *d* ________ 0.6