U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

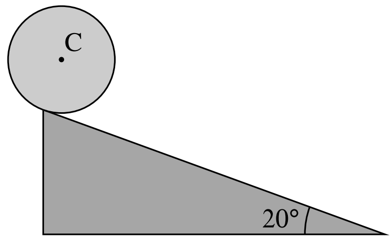
MESTRADO INTEGRADO EM ENG. INFORMÁTICA E COMPUTAÇÃO 2015/2016

EIC0010 — FÍSICA I — 1º ANO, 2º SEMESTRE 12 de julho de 2016

Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8$ m/s^2.

1. (4 valores) Um berlinde de vidro, esférico e homogéneo, tem raio $R = 5$ mm e pesa 13.3 mN. O berlinde desce uma rampa muito comprida, inclinada 20° em relação à horizontal, rodando sem derrapar. A resistência do ar produz uma força igual a $\pi\,\rho\,R^2\,v^2/4$, onde v é a velocidade do centro da esfera e ρ é a massa volúmica do ar, igual a 1.2 kg/m^3; essa força atua no sentido oposto da velocidade e à altura do centro C da esfera. Determine a expressão da aceleração do centro da esfera em função da sua velocidade v (o momento de inércia duma esfera homogénea é $I_{\text{cm}} = 2\,m\,R^2/5$). Determine a velocidade máxima que atingirá o berlinde após descer vários metros (velocidade terminal).



2. (4 valores) (a) A expressão da aceleração tangencial dum objeto é:

$$a_{\text{t}} = 4 - s^2 - 5\,\dot{s} + s\,\dot{s}$$

onde s é a sua posição na trajetória. Determine os pontos de equilíbrio do sistema, no espaço de fase, e demonstre que tipo de pontos são (foco, nó, etc., atrativo ou repulsivo). (b) Ignorando os termos que dependem de $\dot{s}$ obtém-se $a_{\text{t}} = 4 - s^2$, que corresponde a um sistema conservativo. Determine a expressão da energia potencial deste sistema, por unidade de massa (ou seja, admitindo $m = 1$). Trace o gráfico dessa função e com base nele identifique os pontos de equilíbrio deste sistema conservativo e explique se tem ciclos ou órbitas homoclínicas ou heteroclínicas.

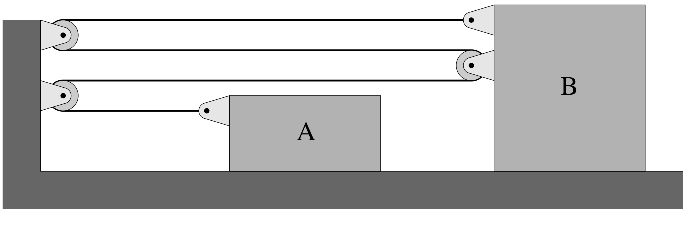
PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. Um projétil é lançado desde um telhado a 5.6 m de altura, com velocidade de 12 m/s, inclinada 30° por cima da horizontal. Desprezando a resistência do ar, calcule o tempo que o projétil demora até bater no chão.

(**A**) 0.93 s (**C**) 1.59 s (**E**) 2.24 s
(**B**) 1.84 s (**D**) 1.22 s

Resposta: ☐

4. Se o bloco B se desloca para a direita com velocidade de valor v, qual é o valor da velocidade (para a esquerda) do bloco A?



(**A**) $v/3$ (**C**) v (**E**) $v/2$
(**B**) $2\,v$ (**D**) $3\,v$

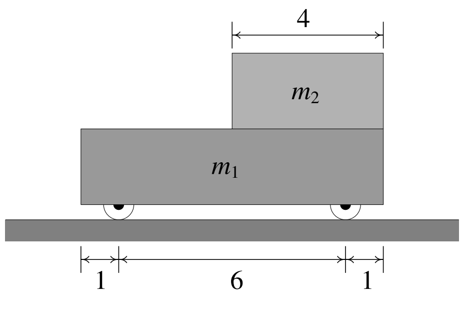
Resposta: ☐

5. O momento de inércia dum disco homogéneo de 10 cm de raio é 5.2×10^{-3} kg·m^2. Determine o valor da força tangencial que deve ser aplicada na periferia do disco, para produzir uma aceleração angular de -6 rad/s^2.

(**A**) 1.25 N (**C**) 0.62 N (**E**) 0.12 N
(**B**) 0.31 N (**D**) 0.21 N

Resposta: ☐

6. As distâncias na figura são em cm e o sistema está em repouso. O carrinho, incluindo as rodas, tem massa $m_1 = 100$ g, distribuída uniformemente, e o bloco de cima tem massa $m_2 = 315$ g, também distribuída uniformemente. Determine o valor da reação normal total nas rodas do lado esquerdo.



(**A**) 0.678 N (**C**) 1.005 N (**E**) 1.356 N
(**B**) 1.543 N (**D**) 2.034 N

Resposta: ☐

7. A força tangencial resultante sobre uma partícula é $F_{\text{t}} = (s+1)(s-1)(3-s)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira, em relação aos pontos de equilíbrio da partícula?

(**A**) $s = -1$ é instável e $s = 3$ é estável.
(**B**) $s = -1$ é estável e $s = 3$ é instável.
(**C**) $s = -1$ e $s = 1$ são instáveis.
(**D**) $s = 1$ é estável e $s = 3$ é instável.
(**E**) $s = 1$ é instável e $s = 3$ é estável.

Resposta: ☐

8. O sistema dinâmico não linear:
$\dot{x} = x\,y - 4\,x + y - 4 \qquad \dot{y} = x\,y + x - 1\,y - 1$
tem um ponto de equilíbrio em $x = 1$, $y = 4$. Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança desse ponto de equilíbrio?

(A) $\dot{x} = -5\,y \quad \dot{y} = -2\,x$
(B) $\dot{x} = 5\,y \quad \dot{y} = -2\,x$
(C) $\dot{x} = 5\,y \quad \dot{y} = 2\,x$
(D) $\dot{x} = -2\,y \quad \dot{y} = 5\,x$
(E) $\dot{x} = 2\,y \quad \dot{y} = 5\,x$

Resposta: ☐

9. Qual das seguintes equações podera ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

(A) $\dot{y} = 2\,y - 5\,y^2$
(B) $\dot{y} = x + x\,y^2$
(C) $\dot{y} = 2\,y^2 - 3\,y$
(D) $\dot{y} = 6\,y + x\,y$
(E) $\dot{y} = 6\,y - y^2$

Resposta: ☐

10. A aceleração tangencial dum objeto verifica a expressão $a_\mathrm{t} = 3\,s^4$ (unidades SI), em que s é a posição na trajetória. Se o objeto parte do repouso em $s = 1$ m, determine o valor absoluto da sua velocidade em $s = 2$ m.

(A) 6.1 m/s
(B) 2.45 m/s
(C) 4.27 m/s
(D) 7.95 m/s
(E) 9.8 m/s

Resposta: ☐

11. Um ciclista demora 44 s a percorrer 400 m, numa pista reta e horizontal, com velocidade uniforme. Sabendo que o raio das rodas da bicicleta é 27.2 cm e admitindo que as rodas não deslizam sobre a pista, determine o valor da velocidade angular das rodas.

(A) 33.4 rad/s
(B) 29.2 rad/s
(C) 16.7 rad/s
(D) 25.1 rad/s
(E) 20.9 rad/s

Resposta: ☐

12. Coloca-se um carrinho numa rampa a uma altura inicial h e deixa-se descer livremente, a partir do repouso, chegando ao fim da rampa (altura zero) com velocidade v. Admitindo que a energia mecânica do carrinho permanece constante (forças dissipativas desprezáveis, massa das rodas desprezável, etc) desde que altura inicial na rampa deveria ser largado o carrinho para que chegasse ao fim com velocidade $3\,v$?

(A) $9\,h$
(B) $h/3$
(C) $3\,h$
(D) $h/9$
(E) $6\,h$

Resposta: ☐

13. As equações de evolução dum sistema linear são:
$\dot{x} = x + 2\,y \qquad \dot{y} = x + y$
Que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto $(x, y) = (0, 0)$?

(A) Ponto de sela.
(B) Foco atrativo.
(C) Foco repulsivo.
(D) Centro.
(E) Nó repulsivo.

Resposta: ☐

14. Quando se liga um PC, o disco rígido demora 3.6 s, a partir do repouso, até alcançar a velocidade normal de operação de 7200 rotações por minuto. Admitindo aceleração angular constante durante esse intervalo, determine o valor da aceleração angular

(A) 419 rad/s^2
(B) 209 rad/s^2
(C) 279 rad/s^2
(D) 182 rad/s^2
(E) 838 rad/s^2

Resposta: ☐

15. O espaço de fase dum sistema dinâmico é o plano xy. Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 + 3\,r^2 + 2\,r$. Quantos ciclos limite tem o sistema?

(A) 1
(B) 4
(C) 2
(D) 0
(E) 3

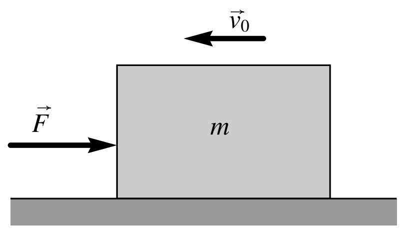
Resposta: ☐

16. As expressões das energias cinética e potencial dum sistema conservativo com dois graus de liberdade, x e θ, são: $E_\mathrm{c} = 7\,\dot{x}^2 + 5\,\dot{\theta}^2$ e $U = -11\,x\,\theta$. Encontre a expressão da aceleração $\ddot{\theta}$.

(A) $\dfrac{11}{7}\,x\,\theta$
(B) $\dfrac{11}{10}\,x$
(C) $\dfrac{11}{10}\,\theta$
(D) $\dfrac{11}{7}\,x$
(E) $\dfrac{11}{10}\,x\,\theta$

Resposta: ☐

17. O bloco na figura, com massa igual a 2 kg, desloca-se para a esquerda, com velocidade inicial $\vec{v}_0$, sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco atua uma força externa $\vec{F}$, horizontal e constante, com módulo igual a 10 N. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é igual a 0.25. Calcule o módulo da aceleração do bloco.

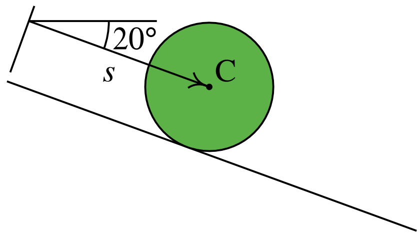


(A) 5.1 m/s^2
(B) 5.8 m/s^2
(C) 2.55 m/s^2
(D) 7.45 m/s^2
(E) 14.9 m/s^2

Resposta: ☐

Resolução do exame de 12 de julho de 2016 Regente: Jaime Villate

Problema 1. Para descrever o movimento do centro C do berlinde basta uma variável, s, que pode ser a distância desde o topo do plano inclinado:



Como o berlinde roda sem derrapar, a sua velocidade angular ω é no sentido dos ponteiros do relógio e com valor igual à velocidade do seu centro, $v = \dot{s}$, dividida pelo raio R:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

O sistema tem então um único grau de liberdade, s, e uma única velocidade generalizada, v.

Resolução por mecânica de Lagrange. A expressão da energia cinética do berlinde é:

$$E_\text{c} = \frac{m}{2}v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\,m\,R^2}{5}\right)\omega^2 = \frac{7\,m}{10}v^2$$

E a expressão da energia potencial gravítica (arbitrando 0 quando s = 0) é:

$$U = -m\,g\,s\,\sin(20^\circ)$$

A expressão da força de resistência do ar é:

$$\vec{F}_\text{r} = -\frac{\pi}{4}\rho\,R^2\,v^2\,\hat{e}_\text{t}$$

onde $\hat{e}_\text{t}$ é o versor tangencial, no sentido em que s aumenta. O ponto de aplicação dessa força pode ser considerado igual à posição do centro C do berlinde, que em função do grau de liberdade é igual a:

$$\vec{r}_\text{C} = s\,\hat{e}_\text{t}$$

Como tal, a força generalizada é então:

$$Q = \vec{F}_\text{r}\cdot\frac{\partial\vec{r}_\text{C}}{\partial s} = \left(-\frac{\pi}{4}\rho\,R^2\,v^2\,\hat{e}_\text{t}\right)\cdot\hat{e}_\text{t} = -\frac{\pi}{4}\rho\,R^2\,v^2$$

E a equação de Laplace é:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\text{c}}{\partial v}\right) - \frac{\partial E_\text{c}}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = Q \quad\Longrightarrow\quad \frac{7\,m}{5}a_\text{t} - m\,g\,\sin(20^\circ) = -\frac{\pi}{4}\rho\,R^2\,v^2$$

A expressão da aceleração do berlinde é então,

$$a_\text{t} = \frac{5\,g}{7}\sin(20^\circ) - \frac{5\,\pi\,\rho\,R^2}{28\,m}v^2$$

E substituindo os valores (em unidades SI) de g = 9.8, da massa m = 0.0133/9.8, do raio R = 0.005 e da massa volúmica do ar, ρ = 1.2, obtém-se a expressão

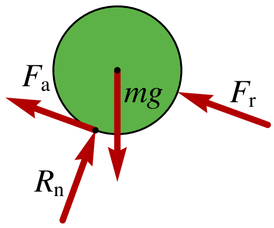
$$a_t = 2.394 - 1.240 \times 10^{-2}\, v^2$$

Como tal, a velocidade terminal (quando a aceleração tangencial for nula) é igual a:

$$v = \sqrt{\frac{2.394}{1.240 \times 10^{-2}}} = 13.9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Quando a velocidade do centro do berlinde é menor que a velocidade terminal, a aceleração tangencial é positiva e a velocidade aumenta. Se a velocidade fosse maior do que a velocidade terminal, a aceleração tangencial seria negativa e a velocidade diminuiria. Após um percurso suficientemente comprido, a velocidade do centro do berlinde atingirá sempre um valor igual à velocidade terminal.

Resolução por mecânica vetorial. A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre do berlinde, onde R_n é a reação normal, F_a a força de atrito estático e $F_r = \pi\,\rho\, R^2 v^2/4$ a força de resistência do ar. A expressão da soma das componentes das forças, na direção tangencial, é:



$$m\,g\,\sin(20^\circ) - F_a - \frac{\pi}{4}\rho\, R^2 v^2 = m\, a_t$$

A única força que produz momento em relação ao centro de massa, no sentido dos ponteiros do relógio, é a força de atrito estático. Como tal, a expressão da soma dos momentos em relação ao centro de massa é:

$$F_a R = \left(\frac{2\,m R^2}{5}\right)\alpha \quad\Longrightarrow\quad F_a = \frac{2}{5}\, m R\,\alpha$$

Substituindo esta última expressão na equação anterior, e tendo em conta que como o berlinde não roda então $R\,\alpha = a_t$, obtém-se a mesma expressão da aceleração já obtida pelo método de mecânica de Lagrange.

Problema 2. (a) As equações de evolução são o seguinte sistema de equações:

$$\dot{s} = v \qquad\qquad \dot{v} = 4 - s^2 - 5\,v + s\,v$$

E os pontos de equilíbrio são as soluções das duas equações:

$$v = 0 \qquad\qquad 4 - s^2 = 0$$

Como tal, há dois pontos de equilíbrio (s, v):

$$\text{P}_1 = (-2, 0) \qquad\qquad \text{P}_2 = (2, 0)$$

Derivando as duas expressões das equações de evolução, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\,s & -5 + s \end{bmatrix}$$

No ponto P_1, a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

que tem determinante igual a -4, ou seja, P_1 é ponto de sela.

No ponto P_2, a matriz da aproximação linear é:

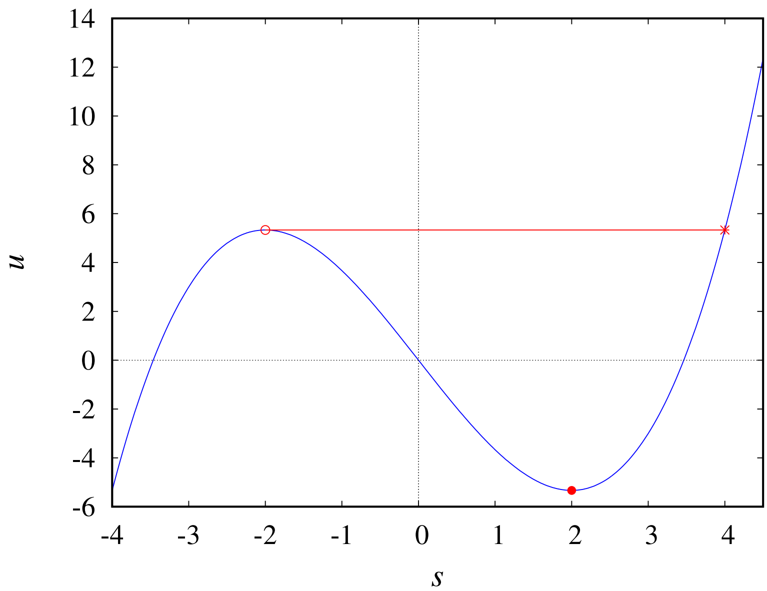
$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

E a respetiva equação de valores próprios é $\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$. Conclui-se então que os valores próprios são $-3/2 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}/2$e P_2 é foco atrativo.

(b) A energia potencial, por unidade de massa, obtém-se a partir da expressão:

$$u = \frac{U}{m} = -\int a_\mathrm{t}\,\mathrm{d}s = \int \left(s^2 - 4\right)\,\mathrm{d}s = \frac{s^3}{3} - 4\,s$$

Os pontos de equilíbrio encontram-se em $s_1 = -2$ e $s_2 = 2$. O gráfico da função u, mostrando os dois pontos de equilíbrio, é o seguinte:



O ponto s_1, máximo local, é instável (ponto de sela) e o ponto s_2, mínimo local, é estável (centro). Existem ciclos quando a energia mecânica, por unidade de massa, estiver compreendida entre -16/3 e 16/3 (valores de u em s_2 e s_1). A reta horizontal apresentada no gráfico, entre o ponto de sela e um ponto de retorno, corresponde a uma órbita homoclínica. Ou seja, este sistema não tem nenhuma órbita heteroclínica, tem uma única órbita homoclínica e infinitos ciclos: todas as curvas de evolução dentro da órbita homoclínica, no espaço de fase.

Perguntas

3. B

4. D

5. B

6. C

7. E

8. E

9. D

10. A

11. A

12. A

13. A

14. B

15. D

16. B

17. D

Critérios de avaliação

Problema 1

Mecânica de Lagrange.

- Determinação do grau de liberdade e relação entre v e ω ______ 10% (0.4)
- Expressão da energia cinética ______ 20% (0.8)
- Expressão da energia potencial ______ 20% (0.8)
- Expressão da força generalizada ______ 20% (0.8)
- Aplicação da equação de Lagrange para obter a equação de movimento ______ 10% (0.4)
- Valor da aceleração, com unidades corretas ______ 10% (0.4)
- Obtenção da velocidade terminal ______ 10% (0.4)

Mecânica vetorial.

- Diagrama de corpo livre ______ 20% (0.8)
- Expressão da soma de forças tangenciais ______ 20% (0.8)
- Expressão da soma de momentos ______ 20% (0.8)
- Determinação da relação entre a_t e α ______ 10% (0.4)
- Obtenção da expressão da força de atrito ______ 10% (0.4)
- Valor da aceleração, com unidades corretas ______ 10% (0.4)
- Obtenção da velocidade terminal ______ 10% (0.4)

Problema 2

- Obtenção das equações de evolução ______ 10% (0.4)
- Determinação dos 2 pontos de equilíbrio ______ 10% (0.4)
- Obtenção da matriz jacobiana ______ 10% (0.4)
- Caraterização do primeiro ponto de equilíbrio ______ 10% (0.4)
- Caraterização do segundo ponto de equilíbrio ______ 10% (0.4)
- Obtenção da expressão da energia potencial por unidade de massa ______ 20% (0.8)
- Gráfico da energia potencial por unidade de massa ______ 10% (0.4)
- Interpretação do gráfico (pontos de equilíbrio, ciclos e órbitas) ______ 20% (0.8)