Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8$ m/s^2.

1. (4 valores) Uma das luas dum planeta é um corpo homogéneo e esférico de raio R. Imagine que a lua é atravessada de lado a lado por um túnel retilíneo que passa pelo seu centro, dentro do qual deixa-se cair livremente um objeto de massa m. Sabendo que a energia potencial gravítica do objeto, no interior desse túnel, é dada pela expressão

$$U = \frac{m\,g}{2}\left(\frac{r^2}{R} - R\right)$$

na qual r é a distância desde o centro da lua e g é a aceleração da gravidade na superfície do planeta: (a) Determine a equação de movimento (expressão da aceleração) do objeto dentro do túnel, ignorando forças dissipativas (a lua não tem atmosfera). (b) Demonstre que o objeto fica a oscilar no túnel e determine o período de oscilação no caso da lua Mimas, com raio de 198 km e $g = 6.8$ cm/s^2. (c) Se existisse um túnel retilíneo desde o Porto até Nova Zelândia, passando pelo centro da Terra, e sabendo que o raio da Terra é 6370 km, quanto tempo demorava viajar desde o Porto até Nova Zelândia saltando nesse túnel? (admitindo que a expressão obtida para a lua homogénea e sem atmosfera fosse válida).

2. (4 valores) As equações de evolução de um sistema dinâmico de duas espécies são:

$$\dot{x} = 3\,x - \frac{3\,x\,y}{1 + 2\,x} \qquad \dot{y} = \frac{3\,x\,y}{1 + 2\,x} - y$$

(a) Explique que tipo de sistema de duas espécies é. (b) Determine os pontos de equilíbrio do sistema e explique que tipos de pontos são. (c) Trace o retrato de fase do sistema.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. A expressão da energia cinética dum sistema conservativo é $\frac{1}{2}\left(\dot{s}^2 + 5\,s^2\right)$, onde s é a posição na trajetória, e a expressão da energia potencial total é $15\,s$. O sistema tem um único ponto de equilíbrio; determine o valor de s nesse ponto de equilíbrio.

(A) 2 **(C)** 1 **(E)** -1
(B) -2 **(D)** 3

Resposta: ☐

4. Para aumentar o momento de inércia dum corpo é necessário:

(A) Afastar partes do corpo para mais longe do eixo.
(B) Diminuir a velocidade angular.
(C) Aumentar a aceleração angular.
(D) Compatá-lo, ocupando menor volume.
(E) Aumentar a velocidade angular.

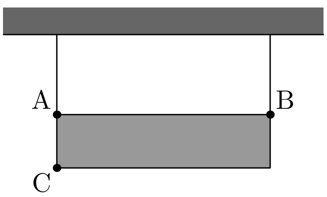
Resposta: ☐

5. A velocidade de um corredor pode aproximar-se de $v = 7.5\sqrt{1 - 0.03\,s}$, na qual v é expressa em km/h e a posição na trajetória, s, é expressa em km. Sabendo que $s = 0$ em $t = 0$, determine quantos quilómetros terá percorrido o corredor ao fim de três quartos de hora.

(A) 6.465 **(C)** 3.741 **(E)** 4.49
(B) 7.758 **(D)** 5.388

Resposta: ☐

6. Para determinar a posição do seu centro de gravidade, uma barra retangular foi pendurada de dois fios verticais, ficando em repouso na posição horizontal que mostra a figura. Sabendo que a tensão no fio ligado no ponto A é 3.4 N, a tensão no fio ligado em B é 1.8 N e o comprimento da barra, desde A até B, é 30 cm, determine a distância desde a aresta AC até o centro de gravidade.



(A) 21.6 cm **(C)** 12.5 cm **(E)** 10.4 cm
(B) 15.0 cm **(D)** 18.0 cm

Resposta: ☐

7. O sistema dinâmico não linear:
$\dot{x} = x\,y - 4\,x + y - 4 \qquad \dot{y} = x\,y + x - 5\,y - 5$
tem um ponto de equilíbrio em $x = 5$, $y = 4$. Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança desse ponto de equilíbrio?

(A) $\dot{x} = 5\,y \quad \dot{y} = -6\,x$ **(D)** $\dot{x} = -5\,y \quad \dot{y} = -6\,x$
(B) $\dot{x} = 6\,y \quad \dot{y} = 5\,x$ **(E)** $\dot{x} = -6\,y \quad \dot{y} = 5\,x$
(C) $\dot{x} = 5\,y \quad \dot{y} = 6\,x$

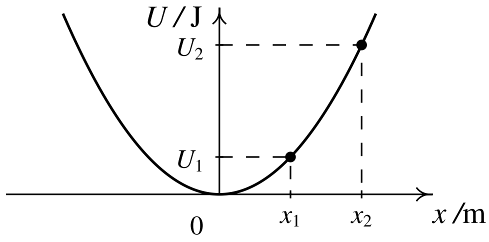
Resposta: ☐

8. A posição dum ponto ao longo dum percurso, em função do tempo, é dada pela expressão $s = 30\,t - 3\,t^2$ (SI). Determine a distância percorrida pelo ponto entre $t = 0$ e $t = 7.5$ s.

(**A**) 18.75 m (**C**) 21.75 m (**E**) 75 m
(**B**) 93.75 m (**D**) 131.25 m

Resposta:

9. O gráfico da figura representa a energia potencial U, em joules, em função da posição x, em metros, duma partícula com massa igual a 9 kg; os valores no gráfico são $x_1 = 9$, $x_2 = 18$, $U_1 = 729$ e $U_2 = 2916$. Se a partícula parte do repouso na posição x_2, com que velocidade chegará ao ponto x_1?



(**A**) 44.09 m/s (**C**) 22.05 m/s (**E**) 88.18 m/s
(**B**) 28.66 m/s (**D**) 11.02 m/s

Resposta:

10. Quando se liga um PC, o disco rígido demora 3.6 s, a partir do repouso, até alcançar a velocidade normal de operação de 7200 rotações por minuto. Admitindo aceleração angular constante durante esse intervalo, determine o valor da aceleração angular

(**A**) 182 rad/s^2 (**C**) 838 rad/s^2 (**E**) 279 rad/s^2
(**B**) 209 rad/s^2 (**D**) 419 rad/s^2

Resposta:

11. As equações de evolução dum sistema linear são:
$\dot{x} = x + y \qquad \dot{y} = 0.5\,x + y$
Que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto $(x, y) = (0, 0)$?

(**A**) Ponto de sela. (**D**) Foco repulsivo.
(**B**) Foco atrativo. (**E**) Centro.
(**C**) Nó repulsivo.

Resposta:

12. Um bloco de massa 4 kg desce deslizando sobre a superfície dum plano inclinado com base $x = 6$ m e altura $y = 7$ m. Calcule o módulo da reação normal do plano sobre o bloco.

(**A**) 59.53 N (**C**) 12.76 N (**E**) 25.51 N
(**B**) 16.8 N (**D**) 39.2 N

Resposta:

13. Uma partícula de massa m desloca-se ao longo de uma curva no plano xy. Sabendo que a expressão da energia cinética da partícula é $E_c = \dfrac{m\,\dot{x}^2}{2}\left(1 + x^6\right)$, encontre a equação da curva.

(**A**) $y = \dfrac{2\,x^{5/2}}{5}$ (**C**) $y = \dfrac{2\,x^{3/2}}{3}$ (**E**) $y = \dfrac{x^5}{5}$
(**B**) $y = \dfrac{x^4}{4}$ (**D**) $y = \dfrac{x^3}{3}$

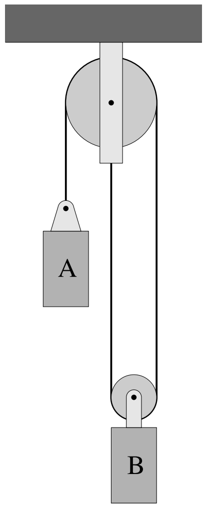
Resposta:

14. Num sistema que se desloca no eixo dos x, a força resultante é $x^2 + x - 2$. Na lista seguinte, qual dos valores corresponde à posição x dum ponto de equilíbrio instável?

(**A**) 1 (**C**) -1 (**E**) 2
(**B**) 3 (**D**) -2

Resposta:

15. No instante em que o bloco A desce com velocidade 24 cm/s, com que velocidade sobe o bloco B?



(**A**) 12 cm/s (**C**) 48 cm/s (**E**) 72 cm/s
(**B**) 24 cm/s (**D**) 8 cm/s

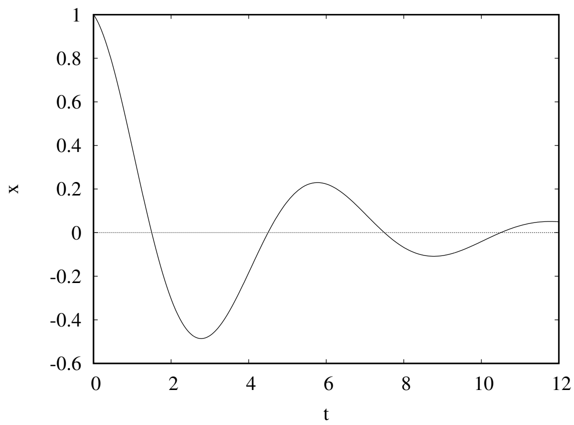
Resposta:

16. As equações dum sistema dinâmico com variáveis de estado (x, y) foram transformadas para coordenadas polares (r, θ), obtendo-se as equações: $\dot{\theta} = -2 \quad \dot{r} = r^2 - 3\,r$
Como tal, conclui-se que o sistema tem um ciclo limite:

(**A**) atrativo com $r = 0$ (**D**) atrativo com $r = 3$
(**B**) repulsivo com $r = 2$ (**E**) repulsivo com $r = 3$
(**C**) atrativo com $r = 2$

Resposta:

17. O gráfico mostra uma possível solução $x(t)$ num sistema dinâmico linear com duas variáveis de estado x e y. Quais dos valores na lista poderão ser os dois valores próprios da matriz desse sistema?



(**A**) $\dfrac{1}{4} \pm \mathrm{i}\,\dfrac{\pi}{2}$ (**C**) $\dfrac{1}{4} \pm \mathrm{i}\,\pi$ (**E**) $-\dfrac{1}{4} \pm \mathrm{i}\,\pi$
(**B**) $-\dfrac{1}{4} \pm \mathrm{i}\,\dfrac{\pi}{2}$ (**D**) $-\dfrac{1}{4} \pm \mathrm{i}\,\dfrac{\pi}{3}$

Resposta:

Resolução do exame de 16 de junho de 2017 Regente: Jaime Villate

Problema 1. (*a*) **Método 1**. Como o potencial depende apenas da distância até o centro, a força resultante é na direção radial e com componente:

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = -\frac{m\,g\,r}{R}$$

e a expressão para a aceleração é:

$$a = \ddot{r} = \frac{F}{m} = -\frac{g\,r}{R}$$

Método 2. A expressão da energia cinética é:

$$E_\mathrm{c} = \frac{m}{2}\dot{r}^2$$

Aplicando a equação de Laplace, para sistemas conservativos com um único grau de liberdade r,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial r} = m\,\ddot{r} + \frac{m\,g\,r}{R} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ddot{r} = -\frac{g\,r}{R}$$

(*b*) A equação de movimento obtida também é válida considerando r na direção radial, mas com sinais diferentes nos segmentos do túnel aos dois lados do centro, onde $r = 0$.

Método 1. As equações de evolução do sistema são:

$$\dot{r} = v \qquad \dot{v} = -\frac{g\,r}{R}$$

Que é um sistema linear e, como tal, com um único ponto de equilíbrio em $r = v = 0$. A matriz do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{R} & 0 \end{bmatrix}$$

Com valores próprios,

$$\lambda = \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Conclui-se então que todos os possíveis movimentos, dentro do túnel onde a equação de movimento obtida é válida, são oscilações harmónicas com frequência angular:

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

O período de oscilação é,

$$T = \frac{2\,\pi}{\Omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Substituindo os valores dados para a lua Mimas, em unidades SI,

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{1.98\times10^5}{6.8\times10^{-2}}} = 10722\ \mathrm{s} = 2\mathrm{h}\ 58\mathrm{m}\ 42\mathrm{s}$$

Método 1. A energia mecânica E_m é igual à energia potencial U nos dois pontos de retorno:

$$r = \pm\sqrt{R^2 + \frac{2E_\mathrm{m}R}{m\,g}} = \pm A$$

e, como tal, o objeto oscila na região $-A \le r \le A$. A expressão da energia mecânica, constante, é:

$$\frac{m}{2}v^2 + \frac{m\,g}{2}\left(\frac{r^2}{R} - R\right) = E_\mathrm{m} = \frac{m\,g}{2R}\left(A^2 - R^2\right)$$

Quando o objeto se desloca na direção positiva de r, a expressão da velocidade é então:

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}\left(A^2 - r^2\right)} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

Separando variáveis e integrando r desde $-A$ até A, que corresponde a meio período de oscilação $T/2$, obtém-se:

$$\int_0^{T/2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(A^2 - r^2)}} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \quad\Longrightarrow\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

(c) O tempo para atravessar o túnel é igual a metade do período de oscilação:

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \pi\sqrt{\frac{6.37\times 10^6}{9.8}} = 2533\ \mathrm{s} = 42\ \mathrm{m}$$

Problema 2. (a) Na primeira equação de evolução, como as variáveis são positivas, é claro que o termo que depende de y é negativo e aumenta quando y aumenta. Como tal, conclui-se que a espécie y faz diminuir a população x.

Na segunda equação, já não é evidente se o aumento de x faz aumentar ou diminuir a população y, porque o termo y aparece tanto no numerador como no denominador. É necessário calcular a derivada da expressão:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}x} = \frac{3y}{1+2x} - \frac{6xy}{(1+2x)^2} = \frac{3y}{(1+2x)^2}$$

Agora sim é claro que esta expressão é sempre positiva para qualquer valor da população x e, como tal, a espécie x faz aumentar a população y. Trata-se de um sistema predador presa, no qual x são as presas e y os predadores.

(b) Os pontos de equilíbrio são as soluções das duas equações:

$$\begin{cases} 3x - \dfrac{3xy}{1+2x} = 0 \\ \dfrac{3xy}{1+2x} - y = 0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x(2x - y + 1) = 0 \\ y(x-1) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação tem duas soluções, $y = 0$ e $x = 1$. Com $y = 0$, a primeira equação tem uma única solução, $x = 0$ (x não pode ser negativa); e com $x = 1$, a solução de primeira equação é $y = 3$. Como tal, há dois pontos de equilíbrio (x, y):

$$\mathrm{P}_1 = (0,0) \qquad\qquad \mathrm{P}_2 = (1,3)$$

Derivando as duas expressões das equações de evolução, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 - \dfrac{3y}{(1+2x)^2} & \dfrac{3x}{1+2x} \\ \dfrac{3y}{(1+2x)^2} & \dfrac{x-1}{1+2x} \end{bmatrix}$$

No ponto P_1, a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

com valores próprios 3 e -1 , ou seja, P_1 é ponto de sela.

No ponto P_2, a matriz da aproximação linear é:

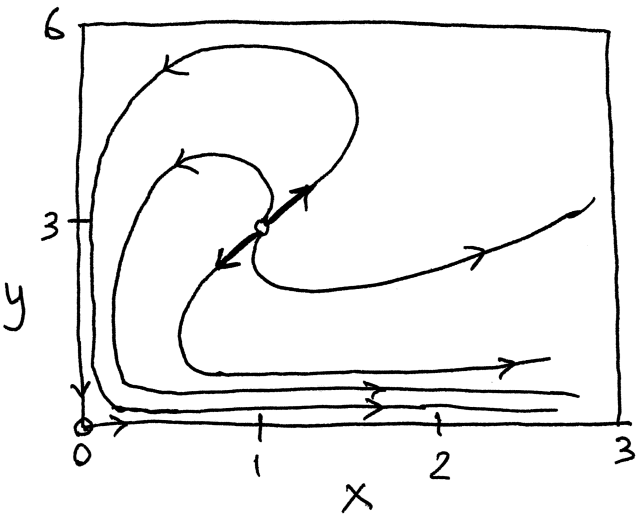
$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A equação dos valores próprios é $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$, com apenas uma raiz, $\lambda = 1$. Conclui-se então que P_2 é nó impróprio repulsivo.

(c) O retrato de fase pode ser obtido no Maxima com o comando:

```
plotdf ([3*x-3*x*y/(1+2*x),3*x*y/(1+2*x)-y],[x,y],[x,0,3],[y,0,6]);
```

E é representado na seguinte figura:



É importante identificar os dois eixos, mostrar as coordenadas dos pontos de equilíbrio, ter em conta que unicamente interessa o primeiro quadrante do espaço de fase e as linhas de evolução num sistema de duas espécies nunca podem atravessar nenhum dos dois eixos.

Perguntas

3. D	**6.** E	**9.** C	**12.** E	**15.** A
4. A	**7.** B	**10.** B	**13.** B	**16.** E
5. D	**8.** B	**11.** C	**14.** A	**17.** D

Critérios de avaliação

Problema 1

- Equação de movimento ________ 0.8
- Explicação de que o sistema oscila ________ 0.8
- Obtenção da expressão do período ________ 0.8
- Cálculo do período da lua ________ 0.8
- Cálculo do tempo de viagem entre Porto e Nova Zelândia ________ 0.8

Problema 2

- Determinação do tipo de sistema ________ 0.8
- Obtenção dos dois pontos de equilíbrio ________ 0.4
- Cálculo da matriz jacobiana ________ 0.4
- Valores próprios e caraterização do primeiro ponto de equilíbrio ________ 0.8
- Valores próprios e caraterização do segundo ponto de equilíbrio ________ 0.8
- Retrato de fase ________ 0.8