U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

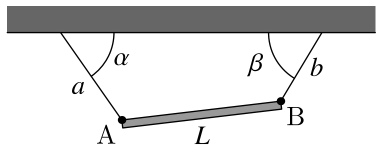
MESTRADO INTEGRADO EM ENG. INFORMÁTICA E COMPUTAÇÃO 2016/2017

EIC0010 — FÍSICA I — 1º ANO, 2º SEMESTRE 30 de junho de 2017

Nome: ____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8\ \text{m/s}^2$.

1. (4 valores) Uma barra reta, não homogénea e muito estreita, de comprimento $L = 6$ m e massa $m = 6.2$ kg, foi pendurada dum teto horizontal, por meio de duas cordas de comprimentos $a = 4$ m e $b = 3$ m, ligadas nos dois extremos A e B da barra, tal como mostra a figura. A barra fica em equilíbrio quando os ângulos entre as cordas e o teto são $\alpha = 60°$ e $\beta = 70°$. (a) Determine os valores das tensões nas duas cordas quando a barra está nessa posição de equilíbrio. (b) Determine a distância desde o centro de gravidade da barra até o ponto A.



2. (4 valores) A equação de movimento $\ddot{x} + \left(3 - x^2\right)\dot{x} - 3\,x + x^3 = 0$ pode ser escrita como sistema dinâmico no plano xy. (a) Determine a posição dos pontos de equilíbrio no plano xy. (b) Explique de que tipo é cada um dos pontos de equilíbrio. (c) Trace o retrato de fase do sistema. (d) Diga se o sistema tem ciclos (soluções periódicas) e em que regiões do plano xy.

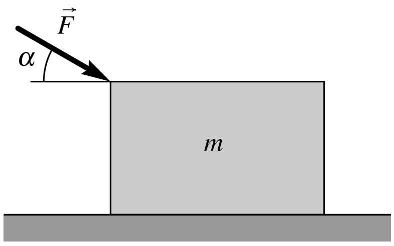
PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. Qual das seguintes equações podera ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

(A) $\dot{y} = -5\,x\,y + 2\,y$
(B) $\dot{y} = 2\,y^2 - 3\,y$
(C) $\dot{y} = x + x\,y^2$
(D) $\dot{y} = 6\,y - y^2$
(E) $\dot{y} = 2\,y - 5\,y^2$

Resposta: ☐

4. Um bloco com massa $m = 5$ kg encontra-se sobre a superfície de uma mesa horizontal. Sobre o bloco atua uma força externa $\vec{F}$, com módulo de 80 N e direção que faz um ângulo $\alpha = 20°$ com a horizontal, tal como mostra a figura. Calcule o módulo da reação normal entre o bloco e a mesa.



(A) 76.36 N
(B) 100.42 N
(C) 21.64 N
(D) 49.0 N
(E) 2.42 N

Resposta: ☐

5. A força tangencial resultante sobre um objeto é $s^2 - s - 2$, onde s é a posição na trajetória. Sabendo que o retrato de fase do sistema tem uma órbita homoclínica que se aproxima assimptoticamente do ponto (a, 0), determine o valor de a.

(A) -1
(B) 1
(C) 3
(D) 2
(E) -2

Resposta: ☐

6. Um jogador de golfe lança a sua bola com uma velocidade inicial de 36 m/s, fazendo um ângulo de 25° com a horizontal. Desprezando a resistência do ar, determine o raio de curvatura da trajetória descrita pela bola, no ponto inicial onde esta foi lançada.

(A) 210.1 m
(B) 252.1 m
(C) 145.9 m
(D) 175.1 m
(E) 121.6 m

Resposta: ☐

7. Calcule o momento de inércia duma esfera com raio de 1 centímetro e massa 17 gramas, que roda à volta dum eixo tangente à superfície da esfera, sabendo que o momento de inércia duma esfera de raio R e massa m à volta do eixo que passa pelo centro é $2\,m\,R^2/5$.

(A) 6.80×10^{-7} kg·m^2
(B) 1.36×10^{-6} kg·m^2
(C) 2.38×10^{-6} kg·m^2
(D) 1.21×10^{-6} kg·m^2
(E) 3.40×10^{-7} kg·m^2

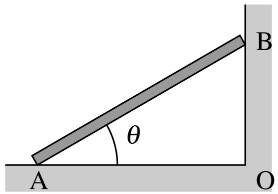
Resposta: ☐

8. Coloca-se um carrinho numa rampa a uma altura inicial h e deixa-se descer livremente, a partir do repouso, chegando ao fim da rampa (altura zero) com velocidade v. Admitindo que a energia mecânica do carrinho permanece constante (forças dissipativas desprezáveis, massa das rodas desprezável, etc) desde que altura inicial na rampa deveria ser largado o carrinho para que chegasse ao fim com velocidade $v/3$?

(A) $6\,h$
(B) $h/3$
(C) $9\,h$
(D) $h/9$
(E) $3\,h$

Resposta: ☐

9. A figura mostra uma barra reta com comprimento L que está a cair; enquanto a barra cai, o extremo A desliza na superfície horizontal e o extremo B desliza sobre a parede vertical. Qual é a relação entre os valores das velocidades dos dois extremos? (x_A e y_B medidos a partir de O)



(A) $v_\text{A} = -v_\text{B} \cos\theta$
(B) $v_\text{A} = -2\, v_\text{B}$
(C) $v_\text{A} = -v_\text{B}$
(D) $v_\text{A} = -v_\text{B} \tan\theta$
(E) $v_\text{A} = -v_\text{B} \sin\theta$

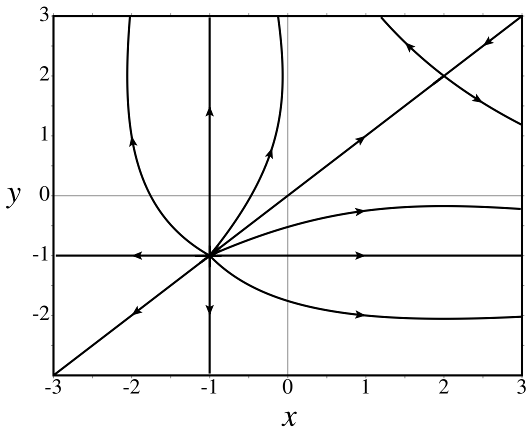
Resposta: ☐

10. O vetor velocidade duma partícula, em função do tempo, é: $2\,t^2\,\hat{\imath} + 0.4\,t^2\,\hat{\jmath}$ (unidades SI). Em $t = 0$ a partícula parte do ponto $y = -7$ no eixo dos y. Calcule o tempo que demora até passar pelo eixo dos x.

(A) 3.27 s
(B) 4.18 s
(C) 5.92 s
(D) 3.74 s
(E) 2.6 s

Resposta: ☐

11. A figura mostra o retrato de fase dum sistema não linear com dois pontos de equilíbrio, em $(x, y) = (-1, -1)$ e $(x, y) = (2, 2)$. Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança do ponto $(-1, -1)$?



(A) $\dot{x} = 3\,x \quad \dot{y} = -3\,y$
(B) $\dot{x} = -3\,x \quad \dot{y} = -3\,y$
(C) $\dot{x} = -3\,y \quad \dot{y} = 3\,x$
(D) $\dot{x} = 3\,x \quad \dot{y} = 3\,y$
(E) $\dot{x} = 3\,y \quad \dot{y} = -3\,y$

Resposta: ☐

12. A trajetória de uma partícula na qual atua uma força central é sempre plana e pode ser descrita em coordenadas polares r e θ. As expressões da energia cinética e da energia potencial central em questão são:

$$E_\text{c} = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) \qquad U = k\,r^5$$

onde m é a massa do corpo e k uma constante. Encontre a equação de movimento para $\ddot{r}$

(A) $r^2\,\dot{\theta}^2 - \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$
(B) $r\,\ddot{\theta} - \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$
(C) $r\,\dot{\theta}^2 - \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$
(D) $r^2\,\dot{\theta}^2 - \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$
(E) $r\,\dot{\theta} - \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$

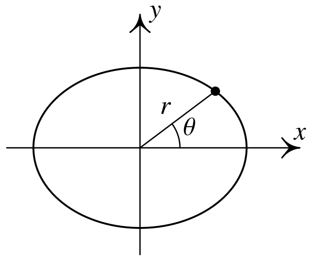
Resposta: ☐

13. Partindo da origem na sua trajetória e sem velocidade inicial, uma partícula fica sujeita à aceleração tangencial $2\sqrt{v^2+5}$, em unidades SI, onde v é o valor da velocidade. Determine a posição da partícula na trajetória quando $v = 30$ m/s.

(A) 13.8 m
(B) 19.9 m
(C) 9.6 m
(D) 11.5 m
(E) 16.6 m

Resposta: ☐

14. Uma partícula desloca-se ao longo de uma elipse no plano xy. As coordenadas cartesianas da partícula são x e y e as suas coordenadas polares são r e θ. Na lista seguinte, quais são as possíveis variáveis que podem ser usadas para descrever os graus de liberdade do sistema?



(A) Duas variáveis (x, y) ou (r, θ).
(B) As duas variáveis r e θ.
(C) Uma única variável x ou y.
(D) Uma única variável x, y ou θ.
(E) As duas variáveis x e y.

Resposta: ☐

15. As equações de evolução dum sistema linear são:

$$\dot{x} = -2\,x - y \qquad \dot{y} = 2\,x$$

Que tipo de ponto de equilíbrio tem esse sistema?

(A) foco repulsivo.
(B) nó repulsivo.
(C) centro.
(D) foco atrativo.
(E) ponto de sela.

Resposta: ☐

16. Um objeto descreve uma trajetória circular de raio 1 m; a velocidade aumenta em função do tempo t, de acordo com a expressão $v = 4\,t^2$ (unidades SI). Determine a expressão para o módulo da aceleração.

(A) $\sqrt{16\,t^4 + 8\,t}$
(B) $\sqrt{256\,t^8 + 64\,t^2}$
(C) $\sqrt{16\,t^4 + 64\,t^2}$
(D) $4\,t^2 + 8\,t$
(E) $8\,t$

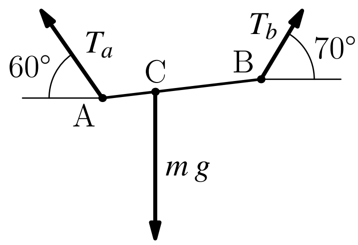
Resposta: ☐

17. O espaço de fase dum sistema dinâmico é o plano xy. Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = -r^3 + 2\,r^2 - r$. Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

(A) foco repulsivo
(B) nó repulsivo
(C) nó atrativo
(D) ponto de sela
(E) foco atrativo

Resposta: ☐

Problema 1. (a) A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre da barra. Como a barra está em equilíbrio, as somas das componentes x e y das três forças devem ser nulas:

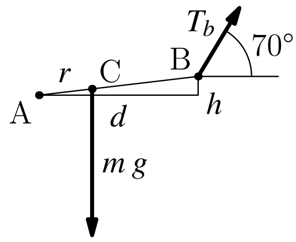


$$T_a\cos(60°) - T_b\cos(70°) = 0$$
$$T_a\sin(60°) + T_b\sin(70°) - m\,g = 0$$

e a solução deste sistema é:

$$T_a = \frac{m\,g\cos(70°)}{\sin(60°)\cos(70°) + \sin(70°)\cos(70°)} = 27.1\ \text{N}$$
$$T_b = \frac{m\,g\cos(60°)}{\sin(60°)\cos(70°) + \sin(70°)\cos(70°)} = 39.7\ \text{N}$$

(b) A diferença de alturas entre os pontos A e B e a distância horizontal entre eles são (ver figura ao lado):



$$h = 4\sin(60°) - 3\sin(70°) = 0.6450\ \text{m} \qquad d = \sqrt{6^2 - h^2} = 5.965\ \text{m}$$

A soma dos momentos das forças em relação ao ponto A deve ser nula e, como tal,

$$\begin{vmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ 0 & -m\,g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & h \\ T_b\cos(70°) & T_b\sin(70°) \end{vmatrix} = -m\,g\,r\cos\theta + T_b\,(d\sin(70°)) - h\cos(70°) = 0$$

na qual r é a distância desde A até o centro de gravidade C e θ é o ângulo que a barra faz com a horizontal. Substituindo os valores de m, g, T_b e $\cos\theta = d/6$,

$$60.41r = 213.55 \quad\Longrightarrow\quad r = 3.535\ \text{m}$$

Problema 2. (a) Introduz-se a variável auxiliar $y = \dot{x}$ para tornar a equação diferencial de segunda ordem numa equação de primeira ordem. As equações de evolução do sistema dinâmico são então,

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = \left(x^2 - 3\right) y + 3\,x - x^3$$

Os pontos de equilíbrio obtêm-se resolvendo o sistema das duas expressões nos lados direitos iguais a zero. No Maxima escreve-se

```
(%i1) e: [y, (x^2-3)*y+3*x-x^3]$
(%i2) p: solve(e);
```

$$\left[\,[x=0,\ y=0\,],\ \left[x=-\sqrt{3},\ y=0\right],\ \left[x=\sqrt{3},\ y=0\right]\right]$$

Existem então 3 pontos de equilíbrio (x, y):

$$\text{P}_1 = (0,0) \qquad \text{P}_2 = (-\sqrt{3},0) \qquad \text{P}_2 = (\sqrt{3},0)$$

(b) a matriz jacobiana é

```
(%i3) j: jacobian(e, [x,y]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2xy-3x^2+3 & x^2-3 \end{bmatrix}$$

E os valores próprios das matrizes das aproximações lineares do sistema, na vizinhança dos 3 pontos de equilíbrio, são

```
(%i4) map (eigenvalues, makelist (subst(q,j), q, p));
```

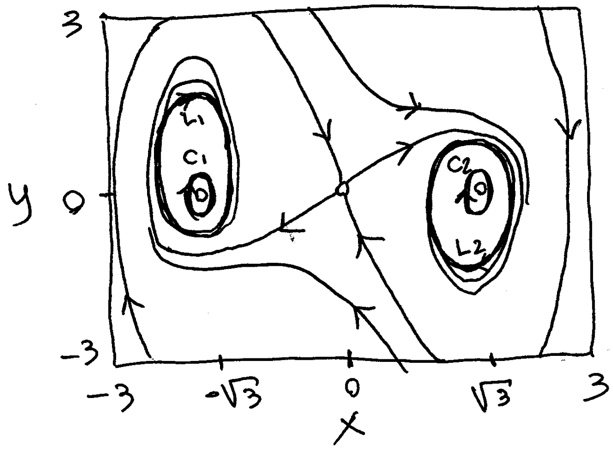
$$\left[\left[\left[-\frac{\sqrt{21}+3}{2}, \frac{\sqrt{21}-3}{2}\right], [1, 1]\right], \left[\left[-\sqrt{6}i, \sqrt{6}i\right], [1, 1]\right], \left[\left[-\sqrt{6}i, \sqrt{6}i\right], [1, 1]\right]\right]$$

Como $\sqrt{21}$ é maior que 3, P_1 é ponto de sela e P_2 e P_3 parecem ser são ambos centros. Os centros podem ser deformados em focos o nós, devido aos termos não lineares, mas o retrato de fase corrobora que existem ciclos na vizinhança de P_2 e P_3 e, como tal, ambos são centros.

(*c*) O retrato de fase obtém-se com o comando:

```
(%i5) plotdf (e, [x, y], [x, -3, 3], [y, -3, 3])$
```

e traçando algumas curvas de evolução. A figura seguinte mostra as curvas mais importantes:



C_1 e C_2 são dois dos ciclos que existem à volta de P_2 e P_3. As duas curvas de evolução que saem do ponto de sela aproximam-se desses ciclos mas, como não se podem cruzar com eles, conclui-se que existem dois ciclos limite, L_1 e L_2 à volta de cada um dos pontos P_2 e P_3.

(*d*) Existe um número infinito de ciclos, dentro dos dois ciclos limite L_1 e L_2 à volta de cada um dos pontos P_2 e P_3.

Perguntas

3. A	**6.** C	**9.** D	**12.** C	**15.** D
4. A	**7.** C	**10.** D	**13.** A	**16.** B
5. D	**8.** D	**11.** D	**14.** D	**17.** E

Critérios de avaliação

Problema 1

- Equação da soma das componentes x das forças ____ 0.6
- Equação da soma das componentes y das forças ____ 0.6
- Obtenção dos valores das duas tensões ____ 0.8
- Determinação das coordenadas dos pontos A e B e ângulo da barra com a horizontal ____ 0.8
- Equação da soma dos momentos das forças ____ 0.4
- Obtenção da distância até o centro de gravidade ____ 0.8

Problema 2

- Equações de evolução ____ 0.4
- Obtenção dos três pontos de equilíbrio ____ 0.4
- Cálculo da matriz jacobiana e valores próprios ____ 0.8
- Caraterização dos três pontos de equilíbrio ____ 0.8
- Retrato de fase ____ 1.2
- Identificação dos ciclos ____ 0.4