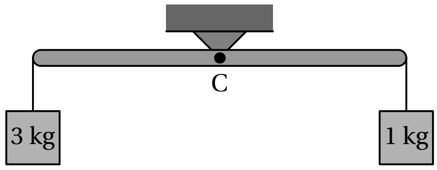
Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8\ \text{m/s}^2$.

1. (4 valores) A barra na figura, com massa $m = 1.9$ kg e comprimento $L = 0.85$ m, pode rodar à volta dum eixo horizontal fixo que passa pelo seu centro de massa C, no ponto meio da barra. Dois blocos de 3 kg e 1 kg foram pendurados nos dois extremos da barra, por meio de fios de massa desprezável em comparação com as massas dos blocos. Sabendo que o momento de inércia da barra, em relação ao eixo no centro de massa C, é dado pela expressão $\frac{1}{12}\,m L^2$, e desprezando a resistência do ar e o atrito no eixo, determine as acelerações dos dois blocos, no instante em que a barra está na posição horizontal.



2. (4 valores) Determine os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = x\left(1 - y^2\right) \qquad \dot{y} = x + y$$

Encontre a matriz da aproximação linear na vizinhança de cada um desses pontos, e os seus valores próprios e vetores próprios (caso existam no plano real xy). Com base nos valores próprios, indique que tipo de ponto é cada um dos pontos de equilíbrio. Mostre os pontos de equilíbrio no plano real xy e com base nos vetores próprios obtidos, trace algumas curvas de evolução na vizinhança de cada um desses pontos.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. Um avião está a voar com velocidade de valor 900 km/h, em relação ao ar. Nesse instante, o valor da velocidade do vento é de 50 km/h. Qual dos valores na lista poderá ser o valor da velocidade do avião em relação à terra?

(A) 825.0 km/h **(C)** 925 km/h **(E)** 1000 km/h
(B) 975.0 km/h **(D)** 800 km/h

Resposta: ☐

4. As equações dum sistema dinâmico com variáveis de estado $(x,\ y)$ foram transformadas para coordenadas polares (r,θ), obtendo-se as equações: $\dot{\theta} = -2 \quad \dot{r} = r^2 - 3\,r$
Como tal, conclui-se que o sistema tem um ciclo limite:

(A) atrativo com $r = 2$ **(D)** repulsivo com $r = 3$
(B) atrativo com $r = 0$ **(E)** atrativo com $r = 3$
(C) repulsivo com $r = 2$

Resposta: ☐

5. A força tangencial resultante sobre um objeto é $-s^2 + s + 6$, onde s é a posição na trajetória. Sabendo que o retrato de fase do sistema tem uma órbita homoclínica que se aproxima assimptoticamente do ponto $(a, 0)$, determine o valor de a.

(A) 3 **(C)** 2 **(E)** 1
(B) -1 **(D)** -2

Resposta: ☐

6. Para subir uma caixa com massa de 65 kg, desde o chão até um camião com altura 120 cm, um homem empurra a caixa sobre cilindros (para reduzir o atrito) ao longo duma rampa inclinada 30° em relação à horizontal. Determine o trabalho mínimo (quando o atrito e a resistência do ar são desprezáveis) que deverá realizar o homem para subir a caixa ao camião.

(A) 331 J **(C)** 382 J **(E)** 191 J
(B) 764 J **(D)** 662 J

Resposta: ☐

7. As equações de evolução de dois sistemas dinâmicos são:

$$\begin{cases}\dot{x} = 2\,x\,y - y\\ \dot{y} = 3\,x - y^2\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{x} = 2\,x - y\\ \dot{y} = 3\,x - 2\,y\end{cases}$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) O 1º é conservativo e o 2º não é conservativo.
(B) Nenhum dos dois é linear.
(C) Ambos são conservativos.
(D) O 1º não é conservativo e o 2º é conservativo.
(E) Nenhum dos dois é conservativo.

Resposta: ☐

8. Determine o módulo da aceleração da Terra à volta do Sol, sabendo que a distância média entre o Sol e a Terra é 1.50×10^{11} m e que a Terra demora 365.25 dias a completar uma volta em torno do Sol (admita uma órbita circular).

(A) $3.43\ \text{m/s}^2$ **(D)** $4.44 \times 10^7\ \text{m/s}^2$
(B) $2.99 \times 10^4\ \text{m/s}^2$ **(E)** $2.64 \times 10^{-25}\ \text{m/s}^2$
(C) $5.95 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2$

Resposta: ☐

9. A equação diferencial:
$$\ddot{x} - x^2 + x + 6 = 0$$
é equivalente a um sistema dinâmico com espaço de fase $(x, \dot{x})$. Qual dos pontos na lista é ponto de equilíbrio desse sistema?

(A) $(0, 0)$ **(C)** $(3, 0)$ **(E)** $(-3, 0)$
(B) $(1, 0)$ **(D)** $(-1, 0)$

Resposta: ☐

10. Um ciclista demora 22 s a percorrer 200 m, numa pista reta e horizontal, com velocidade uniforme. Sabendo que o raio das rodas da bicicleta é 27.8 cm e admitindo que as rodas não deslizam sobre a pista, determine o valor da velocidade angular das rodas.

(A) 49.1 rad/s
(B) 32.7 rad/s
(C) 65.4 rad/s
(D) 57.2 rad/s
(E) 40.9 rad/s

Resposta: ☐

11. O vetor velocidade do objeto 1, em função do tempo, é: $\vec{v}_1 = (1-2\,t)\,\hat{\imath}+8\,t\,\hat{\jmath}$ (unidades SI) e o vetor velocidade do objeto 2, no mesmo referencial, é: $\vec{v}_2 = 5\,t\,\hat{\imath}+(1-9\,t)\,\hat{\jmath}$. Determine o vetor aceleração do objeto 1 em relação ao objeto 2.

(A) $7\,\hat{\imath}+1\,\hat{\jmath}$
(B) $-7\,\hat{\imath}+17\,\hat{\jmath}$
(C) $3\,\hat{\imath}+17\,\hat{\jmath}$
(D) $-3\,\hat{\imath}-1\,\hat{\jmath}$
(E) $7\,\hat{\imath}-1\,\hat{\jmath}$

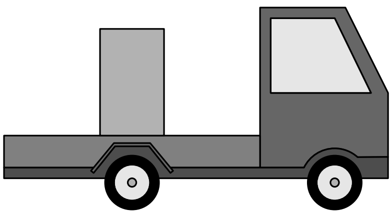
Resposta: ☐

12. Qual das seguintes afirmações, acerca da origem no espaço de fase num sistema dinâmico de duas espécies, é correta?

(A) É sempre ponto de equilíbrio instável.
(B) É sempre ponto de equilíbrio estável.
(C) É sempre ponto de equilíbrio, de qualquer tipo.
(D) Pode não ser ponto de equilíbrio.
(E) É sempre ponto de equilíbrio, do tipo sela.

Resposta: ☐

13. Um camião transporta uma caixa retangular homogénea, com 60 cm de largura na base e 90 cm de altura. Quando o camião acelera, numa estrada horizontal, existe suficiente atrito entre a superfície do camião e a caixa evitando que a caixa derrape sobre a superfície, mas a aceleração não pode ser maior do que um valor máximo, para evitar que a caixa rode. Determine esse valor máximo da aceleração do camião.



(A) 4.20 m/s^2
(B) 7.35 m/s^2
(C) 3.92 m/s^2
(D) 5.88 m/s^2
(E) 6.53 m/s^2

Resposta: ☐

14. Um projetil lançado verticalmente para cima atinge uma altura h máxima, que depende da velocidade inicial com que foi lançado, antes de voltar a cair. Se a velocidade for muito elevada, a altura pode atingir valores elevados, onde a aceleração da gravidade já não é a constante g mas é dada pela expressão:

$$\frac{g\,R^2}{(R+h)^2}$$

onde $R = 6.4\times 10^6$ m é o raio da Terra. Desprezando a resistência do ar, determine o valor mínimo que deverá ter a velocidade inicial, para o objeto atingir uma altura máxima infinita; ou seja, fugir ao campo gravítico da Terra.

(A) 2.2×10^3 m/s
(B) 11.2×10^3 m/s
(C) 3.7×10^3 m/s
(D) 56.0×10^3 m/s
(E) 100.8×10^3 m/s

Resposta: ☐

15. Um bloco de massa 1 kg desce deslizando sobre a superfície dum plano inclinado com base $x = 5$ m e altura $y = 3$ m. Calcule o módulo da reação normal do plano sobre o bloco.

(A) 9.8 N
(B) 8.4 N
(C) 10.08 N
(D) 8.17 N
(E) 4.2 N

Resposta: ☐

16. A trajetória de uma partícula na qual atua uma força central é sempre plana e pode ser descrita em coordenadas polares r e θ. As expressões da energia cinética e da energia potencial central em questão são:

$$E_c = \frac{m}{2}(r^2\dot\theta^2 + \dot r^2) \qquad U = k\,r^4$$

onde m é a massa do corpo e k uma constante. Encontre a equação de movimento para $\ddot r$

(A) $r\,\dot\theta^2 - \dfrac{4\,k\,r^3}{m}$
(B) $r\,\dot\theta + \dfrac{4\,k\,r^3}{m}$
(C) $r\,\ddot\theta + \dfrac{4\,k\,r^3}{m}$
(D) $r^2\,\dot\theta^2 - \dfrac{4\,k\,r^3}{m}$
(E) $r^2\,\dot\theta^2 + \dfrac{4\,k\,r^3}{m}$

Resposta: ☐

17. Qual das seguintes equações poderá ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

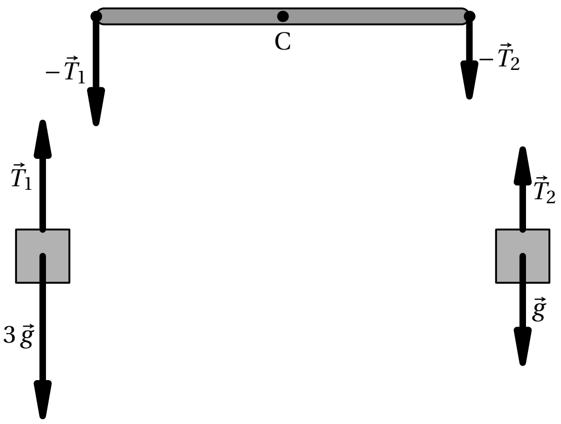
(A) $\dot y = 2\,y^2 - 3\,y$
(B) $\dot y = 2\,y - 5\,y^2$
(C) $\dot y = -5\,x\,y + 2\,y$
(D) $\dot y = 6\,y - y^2$
(E) $\dot y = x + x\,y^2$

Resposta: ☐

Problema 1. Mostra-se a a resolução por dois métodos diferentes: mecânica vetorial e mecânica lagrangiana.

(*a*) *Mecânica vetorial.* É necessário separar o sistema em 3 corpos rígidos (blocos e barra), porque o movimento de cada um deles é diferente: a barra roda, sem se deslocar e os blocos deslocam-se sem rodar.

A figura seguinte mostra os diagramas de corpo livre de cada um dos três corpos. No caso da barra, por ter movimento de rotação em torno de um eixo fixo, não há necessidade de indicar as forças que atuam no eixo.



A barra terá aceleração angular α no sentido contrário aos ponteiros do relógio. A aceleração do bloco do lado esquerdo será $a = \alpha(L/2)$, para baixo, e o bloco do lado direito terá a mesma aceleração a, mas para cima. Como tal, as equações de movimento dos 3 corpos são as seguintes:

$$
\begin{aligned}
3\,g - T_1 &= 3\,a \\
T_2 - g &= a \\
T_1\left(\frac{L}{2}\right) - T_2\left(\frac{L}{2}\right) &= \frac{1}{12}\,m\,L^2\,\alpha
\end{aligned}
$$

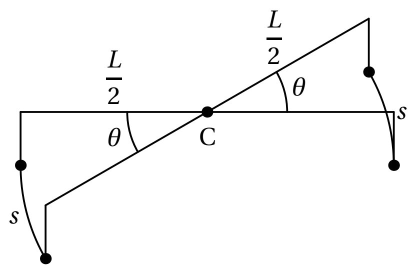
As duas primeiras equações permitem encontrar as tensões nos cabos, em função da aceleração:

$$T_1 = 3\,(g - a) \qquad T_2 = g + a$$

Na terceira equação, substitui-se $\alpha = 2\,a/L$ e, a seguir, as expressões encontradas para as tensões:

$$T_1 - T_2 = \frac{m\,a}{3} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{2\,g}{4 + \frac{m}{3}} = 4.23\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(*b*) *Mecânica lagrangiana.* Considera-se o movimento do sistema completo. A barra rodará um ângulo θ, enquanto os blocos descreverão dois arcos de círculo, ambos com o mesmo comprimento $s = \theta\,L/2$, tal como mostra a figura seguinte.



Como tal, o sistema tem um único grau de liberdade: basta usar $\theta(t)$ ou $s(t)$ para descrever o movimento de todo o sistema. Escolhendo s, as duas variáveis de estado serão s e $v = \dot{s}$, e existirá uma única equação de Lagrange.

O movimento de cada um dos blocos é de translação, num círculo com raio $L/2$, com velocidade $v = \dot{s}$. O movimento da barra é rotação com velocidade angular $\omega = v/(L/2)$. Como tal, a energia cinética do sistema, em função da variável de estado v, é:

$$E_\text{c} = \frac{3\,v^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\,m\,L^2\right)\left(\frac{2\,v}{L}\right)^2 = \left(2 + \frac{m}{6}\right)\,v^2$$

A energia potencial, usando como posição de energia nula a posição horizontal da barra, é o peso do bloco da direita, vezes a altura que sobe quando a barra roda o ângulo $\theta = s/(L/2)$, menos o peso do bloco da esquerda, vezes a altura que desce quando a barra roda. Em função da variável de estado s, a energia potencial é:

$$U = g\left(\frac{L}{2}\right)\sin\left(\frac{2\,s}{L}\right) - 3\,g\left(\frac{L}{2}\right)\sin\left(\frac{2\,s}{L}\right) = -g\,L\sin\left(\frac{2\,s}{L}\right)$$

A aceleração tangencial dos blocos, $a = \dot{v}$, obtém-se aplicando a equação de Lagrange para sistemas conservativos com um único grau de liberdade s:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\text{c}}{\partial v}\right) - \frac{\partial E_\text{c}}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = \left(4 + \frac{m}{3}\right)a - 2\,g\cos\left(\frac{2\,s}{L}\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{2\,g}{4 + \frac{m}{3}}\cos\left(\frac{2\,s}{L}\right)$$

Substituindo a massa da barra e $s = 0$ (posição horizontal), obtém-se $a = 4.23\ \text{m/s}^2$.

Problema 2. Os pontos de equilíbrio são as soluções das duas equações:

$$\begin{cases} x\left(1 - y^2\right) = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} x = 0, \lor, y = 1, \lor, y = -1 \\ y = -x \end{cases}$$

que conduzem a três pontos de equilíbrio no plano $x\,y$:

$$\text{P}_1 = (0,0) \qquad \text{P}_2 = (-1,1) \qquad \text{P}_3 = (1,-1)$$

Derivando as duas expressões das equações de evolução, em ordem a x e a y, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 - y^2 & -2\,x\,y \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

No ponto P_1, a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a soma dos valores próprios é 2 e o seu produto 1, ou seja, os dois valores próprios são iguais a 1. Como tal, P_1 é nó impróprio repulsivo. Os vetores próprios obtêm-se resolvendo o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad x = 0$$

Qualquer vetor no eixo dos y é vetor próprio.

Nos pontos P_2 e P_3, a matriz da aproximação linear é a mesma:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A equação dos valores próprios é:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad (\lambda-2)(\lambda+1) = 0$$

Há dois valores próprios, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$. Como tal, os pontos P_2 e P_3 são pontos de sela.

Os vetores próprios correspondentes a $\lambda_1 = 2$ são as soluções do sistema:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad y = x$$

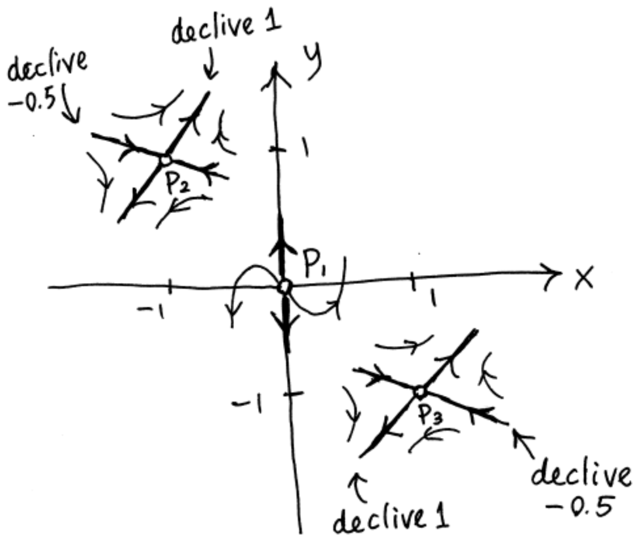
os vetores próprios estão na reta com declive +1, que passa pelo ponto de equilíbrio (P_2 ou P_3).

Os vetores próprios correspondentes a $\lambda_2 = -1$ são as soluções do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad y = -\frac{x}{2}$$

os vetores próprios estão na reta com declive −0.5, que passa pelo ponto de equilíbrio (P_2 ou P_3).

A partir dos valores e vetores próprios obtidos, conclui-se que na vizinhança de P_1 há duas curvas de evolução retas que se saem do ponto, na direção do eixo dos y; as restantes curvas de evolução que saem do ponto são todas curvas. Nos pontos P_2 e P_3, há duas curvas de evolução que saem do ponto de equilíbrio, com declive igual a 1, e outras duas curvas de evolução retas, que terminam no ponto de equilíbrio, com declive -0.5. A figura seguinte mostra esses resultados:



Perguntas

3. C | **6.** B | **9.** C | **12.** C | **15.** B

4. D | **7.** C | **10.** B | **13.** E | **16.** A

5. D | **8.** C | **11.** B | **14.** B | **17.** C

Cotações

Problema 1

(a) Mecânica vetorial.

- Diagrama de corpo livre /equação de movimento do bloco 1 ________ 0.8
- Diagrama de corpo livre /equação de movimento do bloco 2 ________ 0.8
- Diagrama de corpo livre /equação de movimento da barra ________ 0.8
- Indicar que as acelerações dos blocos têm o mesmo valor absoluto ________ 0.6
- Relação entre a aceleração dos blocos e a aceleração angular da barra ________ 0.6
- Resolução das 3 equações de movimento ________ 0.4

(b) Mecânica lagrangiana.

- Indicar que as velocidades dos blocos têm o mesmo valor absoluto ________ 0.4
- Relação entre a velocidade dos blocos e a velocidade angular da barra ________ 0.4
- Energia cinética do sistema, em função das variáveis de estado ________ 1.2
- Energia potencial do sistema, em função das variáveis de estado ________ 1.2
- Aplicação da equação de Lagrange ________ 0.4
- Resolução para obter o valor da aceleração ________ 0.4

Problema 2

- Obtenção dos 3 pontos de equilíbrio ________ 0.4
- Matriz jacobiana ________ 0.4
- Matrizes das aproximações lineares ________ 0.4
- Valores / vetores próprios do ponto na origem ________ 0.6
- Valores / vetores próprios dos outros dois pontos ________ 0.6
- Classificação correta dos 3 pontos ________ 0.8
- Gráfico ________ 0.8