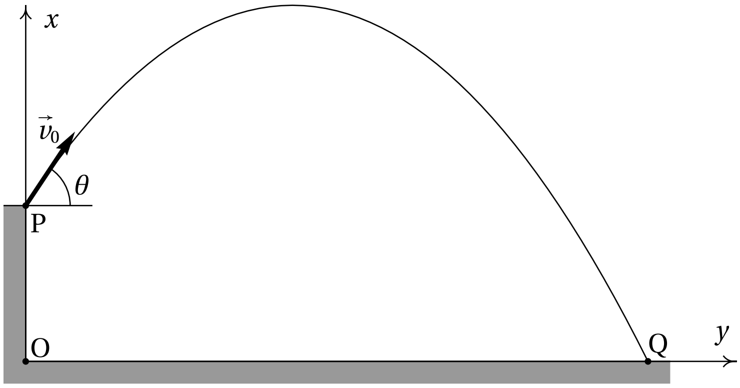
**Duração: 90 minutos**. Prova com consulta de formulário, em folha A4, e uso de dispositivo de cálculo, apenas para fazer contas e não para consultar apontamentos, exames anteriores ou formulários. O dispositivo não pode estar ligado à rede e só pode executar um programa de cada vez. Use $g = 9.8$ m/s$^2$.

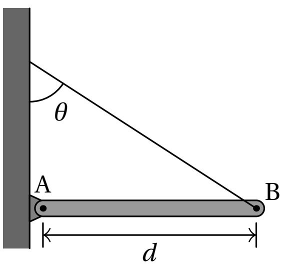
**Li e compreendi o texto acima:**________________________________________

**1.** (6 valores) Um projétil é lançado desde o ponto P, na posição $y = 0$, $x = 1$ m, com velocidade inicial $\vec{v}_0$ no plano $xy$. O vetor $\vec{v}_0$ tem módulo de 35 m/s e faz um ângulo $\theta = 56°$ com o eixo dos $y$, em que o eixo $y$ é horizontal e o eixo $x$ é vertical, tal como mostra a figura. Admitindo que a resistência do ar pode ser desprezada: ($a$) Escreva as equações de evolução do sistema. ($b$) Determine o tempo de voo, ou seja, o tempo que demora o projétil desde P até o ponto Q no eixo dos $y$. ($c$) Determine a distância total percorrida, ao longo da trajetória, desde P até Q. (Resolva o problema na folha de exame).




**PERGUNTAS**. Respostas certas, 1 valor, erradas, −0.25, em branco, 0. Indique as respostas neste enunciado e não na folha de exame.

**2.** A barra homogénea na figura tem massa 1.6 kg e comprimento $d = 1.4$ m. O ponto A da barra está ligado a um pino, num suporte fixo à parede, que permite que a barra rode para cima ou para baixo, enquanto o ponto A permanece fixo. No ponto B está ligada uma corda, colada à parede formando um ângulo $\theta = 47°$, que faz com que a barra permaneça na posição horizontal. Determine o valor da tensão na corda.




**(A)** 8.6 N **(C)** 15.1 N **(E)** 11.5 N
**(B)** 18.0 N **(D)** 20.1 N

**Resposta:** ☐

**3.** As equações $\dot{x} = x(2 + y)$, $\dot{y} = y(2 + x)$ definem um sistema:

**(A)** Predador presa.
**(B)** De duas espécies com competição.
**(C)** Conservativo.
**(D)** De duas espécies com cooperação.
**(E)** Linear.

**Resposta:** ☐

**4.** Um pequeno objeto com massa $m$ desloca-se, sem rodar, ao longo de uma curva no plano $xy$. Usando como grau de liberdade a variável $x$, a expressão da energia cinética da partícula é $E_c = \dfrac{m\,\dot{x}^2}{2}\left(1 + x^4\right)$, determine a equação da curva.

**(A)** $y = \dfrac{x^4}{4}$ **(C)** $y = \dfrac{2\,x^{3/2}}{3}$ **(E)** $y = \dfrac{x^3}{3}$
**(B)** $y = \dfrac{x^5}{5}$ **(D)** $y = \dfrac{2\,x^{5/2}}{5}$

**Resposta:** ☐

**5.** Usou-se o seguinte comando do Maxima para determinar a curva de evolução de um sistema dinâmico:

```
c:  rk([y,x],[x,y],[1,-1],[t,0,5,0.1])
```

qual será o comando que deverá ser usado a seguir para ver o valor da variável $y$ no instante $t = 2$?

**(A)** `c[3][21]` **(C)** `c[1][21]` **(E)** `c[21][3]`
**(B)** `c[21][2]` **(D)** `c[2][21]`

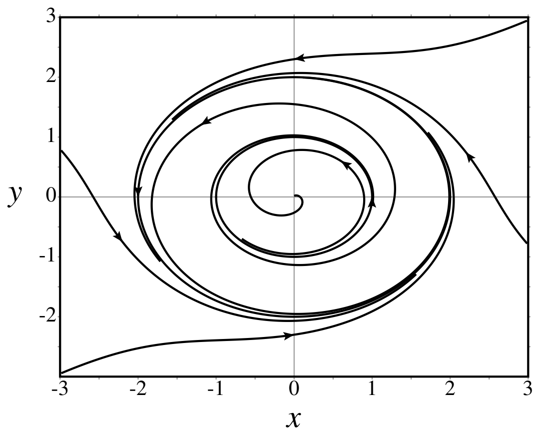
**Resposta:** ☐

**6.** Determine o valor da componente normal da aceleração dum ponto, no instante em que o seu vetor velocidade é $2\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath}$ e o vetor aceleração é $-3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}$ (unidades SI).

**(A)** 23.0 m/s$^2$ **(C)** 4.27 m/s$^2$ **(E)** 14.0 m/s$^2$
**(B)** 4.83 m/s$^2$ **(D)** 2.6 m/s$^2$

**Resposta:** ☐

**7.** A figura mostra o retrato de fase dum sistema com duas variáveis de estado $x$ e $y$. Quais são as equações de evolução do sistema em coordenadas polares?




**(A)** $\dot\theta = 2 \quad \dot r = 3\,r^2 - 2\,r$

**(B)** $\dot\theta = -2 \quad \dot r = r^3 - 3\,r^2 + 2\,r$

**(C)** $\dot\theta = 2 \quad \dot r = 3\,r^2 - r^3 - 2\,r$

**(D)** $\dot\theta = -2 \quad \dot r = 3\,r^2 - r^3 - 2\,r$

**(E)** $\dot\theta = 2 \quad \dot r = r^3 - 3\,r^2 + 2\,r$

**Resposta:** ☐

**8.** Um sistema mecânico conservativo tem energia potencial com um único máximo local, $U = 4$ J, em $s = 2$ m, e um único mínimo local, $U = 2$ J, em $s = 3$ m. Sabendo que o sistema tem uma órbita homoclínica, qual poderá ser o valor da energia dessa órbita?

**(A)** 0 J **(C)** 3 J **(E)** 2 J

**(B)** 6 J **(D)** 4 J

**Resposta:** ☐

**9.** Uma roda de massa 210 gramas, raio 15 cm e momento de inércia $3.15 \times 10^{-3}$ kg·m$^2$, rola sem escorregar sobre uma superfície horizontal. No instante em que a velocidade do centro da roda é de 21 m/s, passam a atuar forças sobre a roda que a levam a parar. Se a roda rolar sem escorregar até parar, qual o valor absoluto do trabalho realizado pela resultante dessas forças?

**(A)** 86.0 J **(C)** 77.18 J **(E)** 72.77 J

**(B)** 81.58 J **(D)** 70.56 J

**Resposta:** ☐

**10.** Um corpo rígido pode rodar à volta de dois eixos fixos paralelos entre si. Quando o corpo roda à volta do eixo 1, o seu momento de inércia é $I_1$ e quando roda à volta do eixo 2, o seu momento de inércia é $I_2$. Sabendo que o centro de massa do corpo encontra-se a 4 cm do eixo 1 e a 2 cm do eixo 2, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

**(A)** $I_1$ é maior que $I_2$.

**(B)** A relação entre $I_1$ e $I_2$ depende da massa.

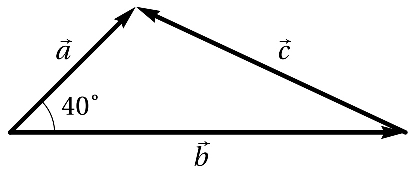
**(C)** $I_1$ e $I_2$ são iguais.

**(D)** $I_1$ é menor que $I_2$.

**(E)** Se o corpo for homogéneo $I_1$ e $I_2$ serão iguais.

**Resposta:** ☐

**11.** Os vetores $\vec a$ e $\vec b$ na figura têm módulos $a = 40$, $b = 80$ (unidades SI). Calcule o produto escalar $\vec b \cdot \vec c$, em unidades SI.




**(A)** -3949 **(C)** -3200 **(E)** -4903

**(B)** -2057 **(D)** -2451

**Resposta:** ☐

**12.** Num sistema dinâmico linear com duas variáveis de estado, a velocidade de fase no ponto (1, 0) do espaço de fase é (3,−2), e a velocidade de fase no ponto (0, 1) é (1,0). Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem do espaço de fase?

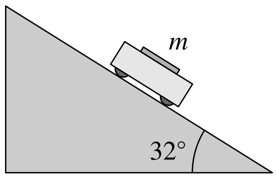
**(A)** foco repulsivo. **(D)** centro.

**(B)** nó repulsivo. **(E)** nó atrativo.

**(C)** foco atrativo.

**Resposta:** ☐

**13.** O carrinho na figura desce o plano inclinado com aceleração constante $a = 3.6$ m/s$^2$. Sobre o carrinho está pousado um livro com massa $m = 1.2$ kg, que acompanha o movimento do carrinho, sem deslizar sobre ele. Calcule o valor da força de atrito entre o livro e o carrinho.

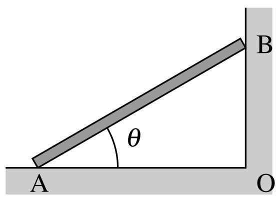



**(A)** 1.91 N **(C)** 17.21 N **(E)** 9.56 N

**(B)** 3.82 N **(D)** 7.65 N

**Resposta:** ☐

**14.** A figura mostra uma barra reta com comprimento $L$ que está a cair; enquanto a barra cai, o extremo A desliza na superfície horizontal e o extremo B desliza sobre a parede vertical. Num instante em que o módulo da velocidade do ponto B é 10 m/s e o ângulo $\theta$ é 30°, qual será o módulo da velocidade do ponto A?




**(A)** 10.0 m/s **(C)** 5.8 m/s **(E)** 20.0 m/s

**(B)** 5.0 m/s **(D)** 8.7 m/s

**Resposta:** ☐

**15.** A velocidade de um corredor pode aproximar-se de $v = 7.5\sqrt{1 - 0.03\,s}$, na qual $v$ é expressa em km/h e a posição na trajetória, $s$, é expressa em km. Sabendo que $s = 0$ em $t = 0$, determine quantos quilómetros terá percorrido o corredor ao fim de uma hora e quarto.

**(A)** 8.716 **(C)** 7.263 **(E)** 5.044

**(B)** 6.053 **(D)** 4.203

**Resposta:** ☐

**Resolução do exame de 26 de junho de 2020** Regente: Jaime Villate

**Problema 1**. (*a*) O movimento do projétil no plano $xy$ tem dois graus de liberdade, $x$ e $y$. Como tal, há quatro variáveis de estado: $x$, $y$, $v_x$ e $v_y$. As equações de evolução são as expressões das derivadas dessas variáveis, em ordem ao tempo, em qualquer ponto do espaço de fase (qualquer posição, não apenas a do ponto P, e qualquer velocidade, e não apenas $\vec{v}_o$ dada no enunciado):

$$\dot{x} = v_x \qquad \dot{y} = v_y \qquad \dot{v_x} = -9.8 \quad \text{(SI)} \qquad \dot{v_y} = 0$$

(*b*) A trajetória desde P até Q corresponde aos seguintes valores iniciais das 4 variáveis de estado (unidades SI):

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = 0 \qquad v_{0x} = 35\sin 56^\circ = 29.02 \qquad v_{0y} = 35\cos 56^\circ = 19.57$$

Arbitrando $t = 0$ em P, e integrando a terceira equação de evolução desde P até um ponto qualquer na trajetória, obtém-se:

$$\int\limits_{29.02}^{v_x(t)} \mathrm{d}v_x = -9.8\int\limits_0^t \mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad v_x(t) = 29.02 - 9.8\,t$$

Substituindo essa expressão no lado direito da primeira equação de evolução, e integrando desde P até Q, obtém-se:

$$\int\limits_1^0 \mathrm{d}x = \int\limits_0^{t_\mathrm{Q}} (29.02 - 9.8\,t)\,\mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad 4.9\,t_\mathrm{Q}^2 - 29.02\,t_\mathrm{Q} - 1 = 0$$

Como $t_\mathrm{Q}$ é positivo, o seu valor será a raíz positiva da equação quadrática anterior:

$$t_\mathrm{Q} = \frac{29.02 + \sqrt{29.02^2 + 4\times 4.9}}{2\times 4.9} = 5.956\ \mathrm{s}$$

(*c*) A posição ao longo da trajetória, $s$, verifica a seguinte equação diferencial:

$$\dot{s} = v$$

Arbitrando o sentido positivo de $s$ de P para Q, o valor da velocidade ($v$) será igual ao módulo do vetor velocidade:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

A expressão para $v_x$ em função do tempo já foi obtida na alínea anterior e a quarta equação de evolução implica que $v_y$ permanece constante, igual ao seu valor inicial 19.57. Como tal,

$$v(t) = \sqrt{(29.02 - 9.8\,t)^2 + 19.57^2}$$

Substituindo essa expressão na equação $\dot{s} = v$ e integrando desde P até Q obtém-se a distância percorrida ao longo da trajetória:

$$d = s_\mathrm{Q} - s_\mathrm{P} = \int\limits_\mathrm{P}^\mathrm{Q} \mathrm{d}s = \int\limits_0^{5.956} \sqrt{(29.02 - 9.8\,t)^2 + 19.57^2}\,\mathrm{d}t = 151.2\ \mathrm{m}$$

(o valor do integral foi obtido no Maxima).

## Perguntas

**2.** E

**3.** D

**4.** E

**5.** E

**6.** C

**7.** C

**8.** D

**9.** C

**10.** A

**11.** A

**12.** B

**13.** A

**14.** C

**15.** A

# Critérios de avaliação

## Problema

- Alínea *a*, incluindo as quatro expressões das derivadas, sem usar os valores da velocidade inicial $v_0$ nem o valor de $\theta$ ........ 1.8
- Alínea *b* ........ 1.8
- Encontrar o integral em ordem ao tempo, desde 0 até o tempo de voo, que permite calcular a distância ao longo da trajetória ........ 2.1
- Determinar o valor numérico do integral ........ 0.3