Duração: 90 minutos. Prova com consulta de formulário, em folha A4, e uso de dispositivo de cálculo, apenas para fazer contas e não para consultar apontamentos, exames anteriores ou formulários. O dispositivo não pode estar ligado à rede e só pode executar um programa de cada vez. Use $g = 9.8\ \text{m/s}^2$.

Li e compreendi o texto acima:________________________________

1. (6 valores) Um objeto com massa de 500 gramas desloca-se ao longo de uma trajetória conhecida. A força resultante sobre o objeto é conservativa e a expressão para a energia potencial total é (unidades SI):

$$U = 4\,s^2 - 8\,s + 20$$

Onde s é a posição na trajetória. (*a*) Escreva as equações de evolução do sistema. (*b*) Determine a matriz jacobiana do sistema. Se num instante inicial o objeto se encontrar em $s = 0$, com velocidade de valor $v = 4\sqrt{3}$ m/s, começará a oscilar; determine: (*c*) o valor máximo da velocidade nessa oscilação e (*d*) os valores mínimo e máximo de s nessa oscilação.

PERGUNTAS. Respostas certas, 1 valor, erradas, −0.25, em branco, 0. Indique as respostas neste enunciado e não na folha de exame.

2. Numa partícula que se desloca no plano xy atua unicamente uma força conservativa. Em coordenadas polares r e θ, as expressões da energia cinética e da energia potencial da partícula são:

$$E_\text{c} = \frac{m}{2}(r^2\dot\theta^2 + \dot r^2) \qquad U = k\,r^5$$

onde m é a massa da partícula e k uma constante. Determine a equação de movimento para $\ddot r$

(A) $r\,\dot\theta^2 - \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$

(B) $r^2\,\dot\theta^2 + \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$

(C) $r\,\dot\theta + \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$

(D) $r\,\ddot\theta + \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$

(E) $r^2\,\dot\theta^2 - \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$

Resposta: ☐

3. A projeção x da aceleração duma partícula aumenta em função do tempo, de acordo com a expressão $a_x = 8\,t$ (unidades SI). No instante $t = 0$ a projeção x da velocidade é nula e a componente da posição é $x = 2$ m. Determine a projeção x da posição em $t = 4$ s.

(A) 541.5 m **(C)** 218.3 m **(E)** 87.3 m

(B) 43.7 m **(D)** 262.0 m

Resposta: ☐

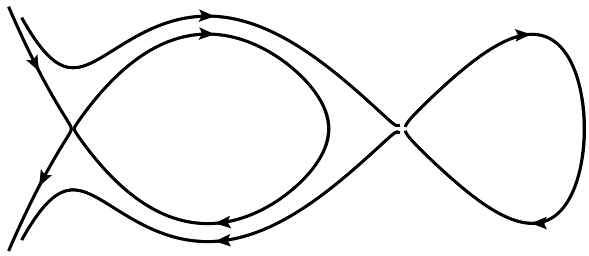
4. Duas esferas homogéneas idênticas, cada uma com raio R e massa m, estão coladas uma à outra. O momento de inércia de cada esfera rodando à volta dum eixo que passa pelo seu centro é $2\,m\,R^2/5$. Encontre a expressão do momento de inércia do sistema das duas esferas, rodando à volta de um eixo que passa pelo centro de uma das esferas e é perpendicular ao segmento entre os centros das esferas.

(A) $\dfrac{14}{5}\,m\,R^2$ **(C)** $\dfrac{24}{5}\,m\,R^2$ **(E)** $\dfrac{18}{5}\,m\,R^2$

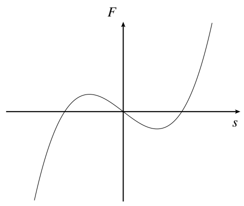
(B) $\dfrac{9}{5}\,m\,R^2$ **(D)** $\dfrac{22}{5}\,m\,R^2$

Resposta: ☐

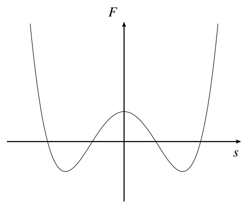
5. A figura mostra o retrato de fase, no espaço de fase (s, v), dum sistema mecânico com força resultante conservativa. Qual dos gráficos na lista poderá representar a força tangencial resultante, F, em função de s?



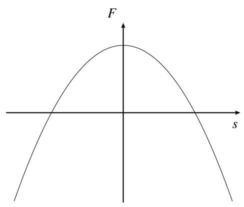
(A)



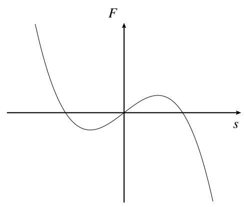
(D)



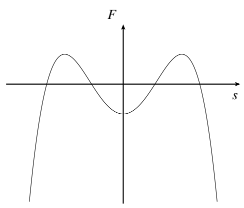
(B)



(E)



(C)



Resposta: ☐

6. A equação de movimento de uma partícula que se desloca no plano xy é $\vec{a} = 4\,\vec{r} - 5\,\vec{v}$, onde $\vec{a}$ é o vetor aceleração, $\vec{r}$ é o vetor posição e $\vec{v}$ é o vetor velocidade. Determine o traço da matriz jacobiana desse sistema.

(A) 8 **(C)** -5 **(E)** 9

(B) -10 **(D)** -18

Resposta: ☐

7. Qual das equações na lista é equivalente a um sistema dinâmico linear?

(A) $x\,\ddot{x} + 2\,x\,\dot{x} = 7$

(B) $x\,\ddot{x} + 3\,x^2\,\dot{x} = 8\,x^2$

(C) $\ddot{x} + 4\,x\,\dot{x} = 8\,x$

(D) $x\,\ddot{x} + 4\,x\,\dot{x} = 5\,x^2$

(E) $\ddot{x} + 3\,\dot{x} = 2\,x^2$

Resposta: ☐

8. Calcule o raio de curvatura da trajetória dum ponto, num instante em que o vetor velocidade é $4\,\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath}$ e o vetor aceleração é $-5\,\hat{\imath} + 6\,\hat{\jmath}$ (unidades SI).

(A) 23.82 m **(C)** 8.88 m **(E)** 8.45 m

(B) 2.95 m **(D)** 1.1 m

Resposta: ☐

9. Se $\vec{a}$ for um vetor e k um número qualquer, diferente de zero, qual das seguintes conclusões é sempre verdadeira?

(A) O sentido de $k\,\vec{a}$ é o mesmo de $\vec{a}$.

(B) O módulo de $k\,\vec{a}$ é maior que o módulo de $\vec{a}$.

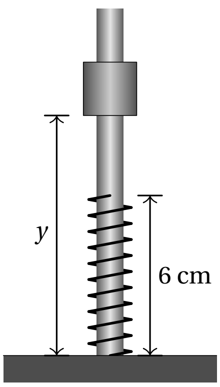
(C) A direção de $k\,\vec{a}$ é a mesma de $\vec{a}$.

(D) $k\,\vec{a}$ é um escalar (igual em qualquer referencial).

(E) O módulo de $k\,\vec{a}$ é igual a k vezes o módulo de $\vec{a}$.

Resposta: ☐

10. Um cilindro com massa de 50 gramas pode deslizar ao longo duma haste metálica vertical. O cilindro parte do repouso na posição $y = 9$ cm, cai livremente e logo comprime a mola de 6 cm até parar. A constante elástica da mola é 61 N/m. No sistema ideal, ignorando o atrito do cilindro com a haste e a resistência do ar, determine o valor mínimo de y quando o cilindro para.



(A) 2.35 cm **(C)** 1.94 cm **(E)** 2.86 cm

(B) 3.21 cm **(D)** 3.97 cm

Resposta: ☐

11. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado tem um único ponto de equilíbrio na origem e um ciclo limite. Qual poderá ser a matriz jacobiana do sistema na origem?

(A) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **(C)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **(E)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **(D)** $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Resposta: ☐

12. O vetor velocidade dum objeto, em função do tempo, é: $\vec{v} = 2\,t^2\,\hat{\imath} + 3\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,\hat{\jmath}$ (unidades SI). Determine o vetor deslocamento entre $t = 1$ e $t = 2$.

(A) $4.7\,\hat{\imath} + 0.18\,\hat{\jmath}$

(B) $0.67\,\hat{\imath} + 1.3\,\hat{\jmath}$

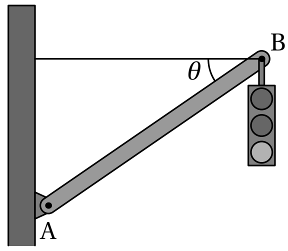
(C) $5.3\,\hat{\imath} + 1.5\,\hat{\jmath}$

(D) $0.67\,\hat{\imath} - 0.2\,\hat{\jmath}$

(E) $5.3\,\hat{\imath} - 0.027\,\hat{\jmath}$

Resposta: ☐

13. O semáforo na figura, com massa total de 41 kg, está pendurado no ponto B duma barra homogénea com massa de 2.1 kg e comprimento (desde A até B) igual a 1.8 m. O ponto A da barra está ligado a um pino, num suporte fixo num poste vertical, que permite que a barra rode para cima ou para baixo, enquanto o ponto A permanece fixo. O cabo que liga o poste ao ponto B da barra está na posição horizontal e o ângulo θ é igual a 35°. Determine o valor da tensão no cabo.



(A) 742.5 N **(C)** 588.5 N **(E)** 406.6 N

(B) 490.6 N **(D)** 672.5 N

Resposta: ☐

14. As populações de coelhos (presas) e rapozas (predadores) numa região são bem explicadas pelo seguinte sistema predador-presa:

$$\dot{x} = 2\,x\,y - 800\,x \qquad \dot{y} = 750\,y - 3\,x\,y$$

Quais deverão ser as populações iniciais de coelhos e rapozas para que as duas populações permaneçam constantes sem oscilar?

(A) 400 rapozas e 250 coelhos.

(B) 800 rapozas e 750 coelhos.

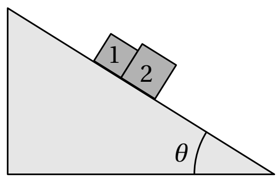
(C) 250 rapozas e 400 coelhos.

(D) 0 rapozas e 250 coelhos.

(E) 400 rapozas e 0 coelhos.

Resposta: ☐

15. A inclinação do plano inclinado na figura é $\theta = 32°$ em relação à horizontal. O bloco 1 tem massa $m_1 = 1$ kg e coeficiente de atrito cinético com o plano inclinado igual a 0.3. O bloco 2 tem massa $m_2 = 2$ kg e coeficiente de atrito cinético com o plano inclinado igual a 0.4. Determine a aceleração dos blocos.



(A) $1.3\ \mathrm{m/s^2}$ **(C)** $0.5\ \mathrm{m/s^2}$ **(E)** $3.0\ \mathrm{m/s^2}$

(B) $3.8\ \mathrm{m/s^2}$ **(D)** $2.1\ \mathrm{m/s^2}$

Resposta: ☐

Resolução do exame de 20 de julho de 2020 Regente: Jaime Villate

Problema 1. (*a*) Mostra-se a a resolução por três métodos diferentes. (*i*) *Mecânica newtoniana*:

$$a = \frac{F}{m} = -2\int U\,\mathrm{d}s = 16 - 16\,s$$

E as equações de evolução são:

$$\dot{s} = v \qquad \dot{v} = 16 - 16\,s$$

(*ii*) *Mecânica lagrangiana*:

$$E_\mathrm{c} = \frac{m\,v^2}{2} = \frac{v^2}{4}$$

Equação de Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial v}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\dot{v}}{2} + 8\,s - 8 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \dot{v} = 16 - 16\,s$$

Essa é uma das equações de movimento. A outra é a definição de v: $\dot{s} = v$.

(*i*) *Mecânica hamiltoniana*: A função hamiltoniana de uma partícula com um único grau de liberdade e força resultante conservativa é a energia mecânica por unidade de massa:

$$H = \frac{v^2}{2} + \frac{U}{m} = \frac{v^2}{2} + 8\,s^2 - 16\,s + 40$$

E as equações de movimento são as equações de Hamilton:

$$\dot{s} = \frac{\partial H}{\partial v} = v \qquad \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial s} = 16 - 16\,s$$

(*b*) Derivando os dois lados direitos das equações de evolução, em ordem a s e a v, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe-se que se trata de um sistema linear, com um único ponto de equilíbrio, neste caso um centro, já que a energia potencial quadrática corresponde a um oscilador harmónico simples.

(*c*) A energia mecânica, constante, é igual à soma das energias cinética e potencial no instante inicial:

$$E_\mathrm{m} = \frac{v_0^2}{4} + U(0) = 12 + 20 = 32\ \mathrm{J}$$

O valor da velocidade e, portanto, a energia cinética, será máxima quando a energia potencial for mínima. U tem um mínimo no ponto de equilíbrio do sistema, onde $\dot{v} = 0$, ou seja, $s = 1$. Como tal,

$$\frac{v_\text{máx}^2}{4} + U(1) = 32 \quad\Longrightarrow\quad v_\text{máx} = \sqrt{4\,(32 - 16))} = 8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(*d*) Os valores máximo e mínimo de s são os *pontos de retorno*, onde a velocidade e a energia cinética são nulas, ou seja, $E_\mathrm{m} - U = 0$. Como tal,

$$12 - 4\,s^2 + 8\,s = 0 \quad\Longrightarrow\quad s^2 - 2\,s - 3 = (s-3)(s+1) = 0$$

O valor mínimo da posição na trajetória é $s_\text{mín} = -1$ m, e o valor máximo $s_\text{máx} = 3$ m (Também é possível traçar a curva de evolução usando o programa *plotdf*, e determinar as respostas das alíneas *c* e *d* com precisão).

Perguntas

2. A	**5.** C	**8.** C	**11.** C	**14.** C
3. E	**6.** B	**9.** C	**12.** A	**15.** D
4. C	**7.** D	**10.** E	**13.** C	

Critérios de avaliação

Problema

- Cada alínea vale 1.5 valores. Se usar o método gráfico para resolver as alíneas *c* e *d*, deverá ficar claro qual foi o gráfico que traçou e o erro na medição dos valores não poderá ser muito elevado.