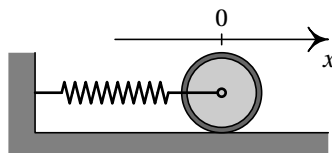


Duração: 90 minutos. Prova com consulta de formulário, em folha A4, e uso de dispositivo de cálculo, apenas para fazer contas e não para consultar apontamentos, exames anteriores ou formulários. O dispositivo não pode estar ligado à rede e só pode executar um programa de cada vez. Use $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Nome: _____

1. (6 valores) A roda na figura pode rodar na direção x sobre uma mesa horizontal, sem deslizar. O eixo da roda está ligado a uma mola horizontal com constante elástica $k = 28.3 \text{ N/m}$; o atrito entre o extremo da mola e o eixo da roda é desprezável e quando o centro da roda estiver na posição $x = 0$, a mola não está nem comprimida nem esticada. A roda tem massa igual de 520 gramas, raio igual a 4.8 cm e raio de giração, em relação ao seu eixo, igual a 4.12 cm. Desprezando a resistência do ar: (a) determine a equação de movimento associada à variável x . (b) calcule o período de oscilação do centro da roda.



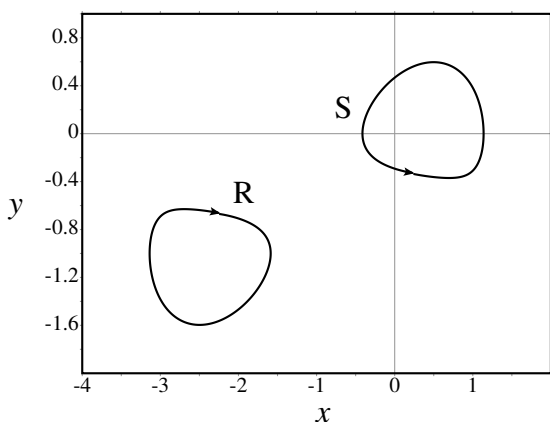
PERGUNTAS. Respostas certas, 1 valor, erradas, -0.25, em branco, 0. Indique as respostas neste enunciado e não na folha de exame.

2. Partindo da origem na sua trajetória e sem velocidade inicial, uma partícula fica sujeita à aceleração tangencial $4\sqrt{v^2 + 5}$, em unidades SI, onde v é o valor da velocidade. Determine a posição da partícula na trajetória quando $v = 65 \text{ m/s}$.

- (A) 9.1 m (C) 13.1 m (E) 7.6 m
(B) 10.9 m (D) 15.7 m

Resposta:

3. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado, x e y , tem unicamente dois pontos de equilíbrio no plano xy : um foco atrativo em $(0,0)$ e um foco repulsivo em $(-2, -1)$. O sistema tem dois ciclos limite, identificados pelas letras R e S na figura seguinte. Apenas uma das afirmações seguintes é correta; diga qual delas.



- (A) R e S são ambos repulsivos.
(B) Nem R nem S podem ser atrativos.
(C) R é atrativo e S é repulsivo.
(D) R é repulsivo e S é atrativo.
(E) R e S são ambos atrativos.

Resposta:

4. Um objeto descreve uma trajetória circular de raio 1 m; a velocidade aumenta em função do tempo t , de acordo com a expressão $v = 3t^2$ (unidades SI). Determine a expressão para o módulo da aceleração.

- (A) $\sqrt{81t^8 + 36t^2}$ (D) $3t^2 + 6t$
(B) $6t$ (E) $\sqrt{9t^4 + 6t}$
(C) $\sqrt{9t^4 + 36t^2}$

Resposta:

5. Num sistema dinâmico linear com duas variáveis de estado, a velocidade de fase no ponto $(1, 0)$ do espaço de fase é $(2, 2)$, e a velocidade de fase no ponto $(0, 1)$ é $(-1, 0)$. Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem do espaço de fase?

- (A) foco repulsivo. (D) centro.
(B) nó atrativo. (E) ponto de sela.
(C) foco atrativo.

Resposta:

6. Uma partícula de massa m desloca-se sobre a superfície de uma calha com forma de cicloide, com equações paramétricas:

$$x = \frac{a}{4}(2\theta + \sin 2\theta) \quad y = \frac{a}{4}(1 - \cos 2\theta)$$

Onde a é uma constante e θ varia entre 0 e π . Encontre a expressão da energia cinética.

- (A) $\frac{m a^2 \dot{\theta}^2}{2}(1 + \sin 2\theta)$ (D) $\frac{m a^2 \dot{\theta}^2}{4}(1 + \sin 2\theta)$
(B) $\frac{m a^2 \dot{\theta}^2}{2}(1 + \cos 2\theta)$ (E) $\frac{m a^2 \dot{\theta}^2}{8}(\cos 2\theta + \sin 2\theta)$
(C) $\frac{m a^2 \dot{\theta}^2}{4}(1 + \cos 2\theta)$

Resposta:

7. Dois vetores \vec{a} e \vec{b} , diferentes de zero, verificam a propriedade:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

Qual das seguintes relações é sempre verdadeira?

- (A) $\vec{a} = \vec{b}$ (C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (E) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$
 (B) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ (D) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$

Resposta:

8. Uma partícula com massa $m = 2$ desloca-se no eixo dos x sob o efeito de uma força resultante conservativa, com energia potencial: $2x^3 e^{-x^2}$. Qual das seguintes afirmações é correta?

- (A) Há 3 pontos de equilíbrio e 2 órbitas homoclínicas.
 (B) Há 3 pontos de equilíbrio e nenhuma órbita homoclínica.
 (C) Há 3 pontos de equilíbrio e uma órbita homoclínica.
 (D) Há 2 pontos de equilíbrio e uma órbita homoclínica.
 (E) Há 2 pontos de equilíbrio e nenhuma órbita homoclínica.

Resposta:

9. Qual das seguintes equações poderá ser uma das equações de evolução num sistema de duas espécies?

- (A) $\dot{y} = x\sqrt{y-x} + xy^2$ (D) $\dot{y} = 2xy^2 - x \cos y$
 (B) $\dot{y} = x\sqrt{y+1} - 5yx^2$ (E) $\dot{y} = y^3 - 3x \sin x$
 (C) $\dot{y} = 2xy^2 + y \cos x$

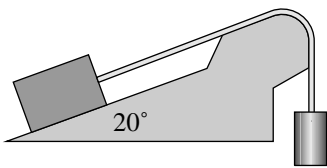
Resposta:

10. Atira-se para o mar uma pedra de massa m , desde uma altura h sobre o nível do mar, com velocidade inicial de módulo v_0 . Considerando a resistência do ar desprezável, determine o módulo da velocidade com que a pedra atinge a superfície do mar.

- (A) $\sqrt{v_0^2 + 2gh}$ (D) $\sqrt{v_0^2 + gh}$
 (B) v_0 (E) $2gh$
 (C) $\sqrt{2gh}$

Resposta:

11. A figura mostra um bloco que desliza sobre um plano inclinado, ligado por uma corda a um cilindro. Se o valor absoluto da velocidade do cilindro for v , qual será o valor absoluto da velocidade do bloco?



- (A) $v \cos 20^\circ$ (C) $v/2$ (E) $v \sin 20^\circ$
 (B) $2v$ (D) v

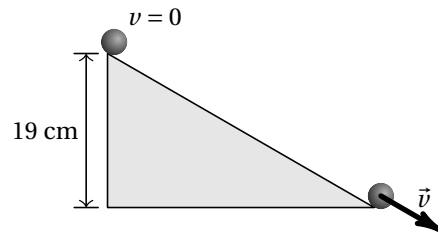
Resposta:

12. A força resultante sobre um objeto de massa 2 kg é $\vec{F} = 2\hat{i} + 4t\hat{j}$ (SI) no intervalo $0 < t < 6$ segundos e nula em $t > 6$ segundos. Sabendo que a velocidade do objeto em $t = 0$ era $8\hat{i}$ m/s, calcule a velocidade em $t = 9$ s.

- (A) $20.0\hat{i} + 72.0\hat{j}$ (D) $14.0\hat{i} + 12.0\hat{j}$
 (B) $17.0\hat{i} + 18.0\hat{j}$ (E) $17.0\hat{i} + 81.0\hat{j}$
 (C) $14.0\hat{i} + 36.0\hat{j}$

Resposta:

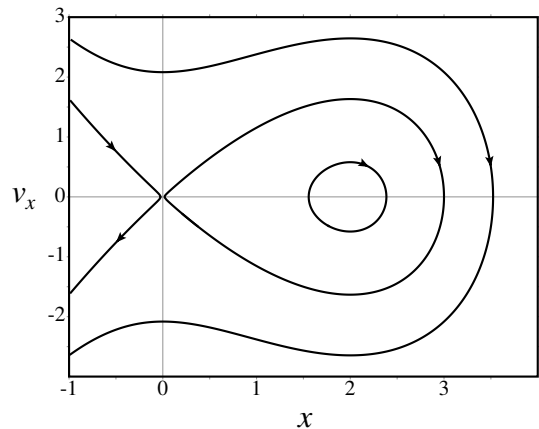
13. Uma esfera com massa de 0.03 kg roda sem deslizar sobre a superfície dum plano inclinado com altura de 19 cm. A esfera parte do repouso no ponto mais alto do plano, chegando ao ponto mais baixo com velocidade de módulo $v = 1.63$ m/s (a resistência do ar é desprezável). Determine o trabalho realizado pela força de atrito do plano sobre a esfera.



- (A) 0 (C) -10.64 mJ (E) -15.96 mJ
 (B) -5.32 mJ (D) -21.28 mJ

Resposta:

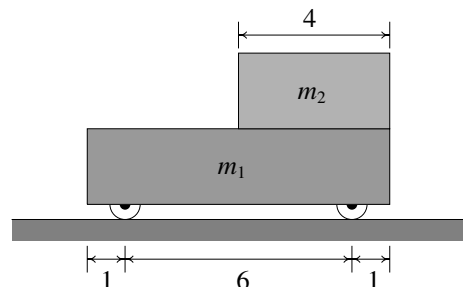
14. A figura mostra o retrato de fase dum sistema conservativo com um único grau de liberdade, x . Qual das expressões na lista é a expressão correta para a aceleração a_x ?



- (A) $2x - x^2$ (D) $2x + x^2$
 (B) $-2x + x^2$ (E) $x - x^2$
 (C) $-2x - x^2$

Resposta:

15. O sistema na figura está em repouso e as distâncias são em cm. A massa do carrinho é $m_1 = 100$ g, distribuída uniformemente. A massa do bloco por cima do carrinho é $m_2 = 280$ g, também distribuída uniformemente. Determine o valor da reação normal total nas rodas do lado esquerdo.



- (A) 0.621 N (C) 1.241 N (E) 1.372 N
 (B) 0.947 N (D) 1.862 N

Resposta:

Problema 1. (a) Em unidades SI, o momento de inércia da roda em relação ao seu eixo é:

$$I = 0.520 \times 0.0412^2 = 8.827 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

As variáveis de estado são a posição x e a velocidade \dot{x} . Como a roda não desliza na mesa, a sua velocidade angular é igual a

$$\omega = \frac{\dot{x}}{0.048}$$

A expressão da energia cinética da roda é (SI):

$$E_c = \frac{1}{2} 0.520 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} 8.827 \times 10^{-4} \left(\frac{\dot{x}}{0.048} \right)^2 = 0.4516 \dot{x}^2$$

e a expressão da energia potencial (elástica da mola) é:

$$U = \frac{1}{2} 28.3 x^2 = 14.15 x^2$$

A equação movimento obtém-se aplicando a equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (0.4516 \dot{x}^2)}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial (14.15 x^2)}{\partial x} = 0.9031 \ddot{x} + 28.3 x = 0 \implies \ddot{x} = -31.34 x$$

(b) As equações de evolução são

$$\dot{x} = v \quad \dot{v} = -31.34 x$$

correspondentes a um sistema dinâmico linear com matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -31.34 & 0 \end{pmatrix}$$

A equação dos valores próprios é então

$$\lambda^2 + 31.34 = 0 \implies \lambda = \pm 5.598 i$$

Isso mostra que todos os possíveis movimentos do centro da roda são oscilações com frequência angular

$$\Omega = 5.598 \text{ s}^{-1}$$

e período de oscilação:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 1.122 \text{ s}$$

Perguntas

2. D

5. A

8. B

11. D

14. A

3. C

6. C

9. C

12. C

15. B

4. A

7. C

10. A

13. A