

# Temas problemáticos na Física de 12.º ano

J. E. Villate

*Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia*

E-mail: villate@fe.up.pt

14 de Janeiro de 2009

*“Actualmente já não há nada importante a ser descoberto na Física;  
resta apenas obtermos mais medições e com melhor precisão.”*

William Thomsom (Lord Kelvin), 1900

Esta frase de Kelvin tornou-se célebre por ter sido dita na mesma época em que surgiu a teoria quântica e poucos anos antes do desenvolvimento da teoria da relatividade, duas teorias que mostraram que ainda faltava muito para ser descoberto na Física Clássica.

Na nossa interminável aprendizagem da Física passamos por situações análogas à que foi vivida por Kelvin no início do século XX. Quando acreditamos ter compreendido perfeitamente algum fenómeno, somos surpreendidos com paradoxos e resultados errados que não reproduzem as observações experimentais. Isso não deve ser visto como uma fraqueza no nosso método para estudar os fenómenos naturais, mas sim como uma oportunidade para aprendermos mais acerca desses fenómenos. A Física é uma ciência experimental que precisa de ser corroborada experimentalmente em diversas situações.

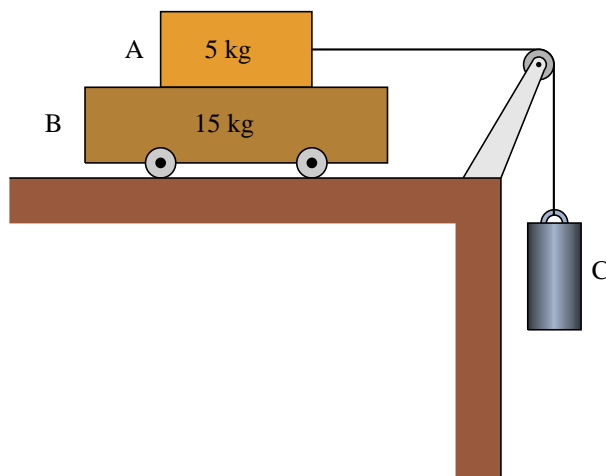
Inclusivamente, na Física elementar, problemas aparentemente simples podem conduzir a interpretações erradas. Neste artigo vamos descrever algumas questões problemáticas relacionadas com o programa de Física de 12.º ano.

## **1. A força de atrito**

O valor máximo da força de atrito estático entre duas superfícies sólidas e rígidas é igual ao produto da reacção normal vezes o coeficiente de atrito estático,  $\mu_e R_n$ . Mas quando a força de atrito estático não tiver o seu valor máximo, deixa de ser igual a  $\mu_e R_n$ , podendo ter qualquer valor entre 0 e esse valor máximo; nesse caso a força de atrito passa a ser mais uma incógnita que pode ser calculada a partir da segunda lei de Newton.

Consideremos um exemplo: o sistema ilustrado na figura 1; o coeficiente de atrito estático entre as superfícies dos blocos A e B é  $\mu_e = 0,5$  e o coeficiente de atrito cinético é  $\mu_c = 0,4$ . A roldana e as rodas podem ser consideradas perfeitamente rígidas, com massa e atrito nos eixos desprezáveis. O sistema é mantido inicialmente em repouso por meio de uma força externa que segura o cilindro C; pretende-se calcular a aceleração dos blocos A e B em relação à aceleração

da gravidade  $g$ , quando for retirada a força que segurava o cilindro, para os casos em que a massa do cilindro C for 2,5 kg e 3,5 kg.



**Figura 1:** Dois blocos acelerados por um cilindro.

Tendo em conta que a aceleração do cilindro C será igual à aceleração do bloco A,  $a_A$ , a segunda lei de Newton, aplicada ao cilindro C, implica que a tensão no fio será:

$$T = m_C (g - a_A) \quad (1)$$

As equações para as componentes das forças na direcção vertical permitem calcular o valor da força de reacção normal entre os blocos,  $R_n$ , e a soma das reacções normais,  $F$ , nas rodas do bloco B:

$$R_n = m_A g \quad (2)$$

$$F = (m_A + m_B) g \quad (3)$$

As equações para as componentes das forças na direcção horizontal são:

$$F_a = m_B a_B \quad (4)$$

$$m_C (g - a_A) - F_a = m_A a_A \quad (5)$$

onde  $F_a$  é a força de atrito entre os dois blocos. Admitindo que o bloco A escorrega sobre o B, o atrito será cinético e a força de atrito será igual a  $\mu_c R_n$ . Assim, as equações 4 e 5 conduzem às seguintes expressões para as acelerações:

$$a_B = \frac{\mu_c m_A}{m_B} g \quad (6)$$

$$a_A = \frac{m_C - \mu_c m_A}{m_A + m_C} g \quad (7)$$

A equação 7 mostra que, para que seja possível que o bloco A escorregue sobre o B, é necessário que a massa do cilindro C seja maior que  $\mu_c m_A$ ; os dois valores dados para a massa do cilindro, 2,5 kg e 3,5 kg, verificam essa condição.

No caso em que a massa do cilindro C é 2,5 kg, substituindo as massas dos blocos (5 kg e 15 kg) e o valor do coeficiente de atrito (0,4) nas equações 6 e 7, obtêm-se as acelerações dos blocos:

$$a_B = 0,133 g \quad a_A = 0,067 g \quad (8)$$

No entanto, esta solução não é possível: se os dois blocos partem do repouso e o bloco A escorrega sobre o bloco B, então em qualquer instante a velocidade de A deveria ser maior do que a de B e, portanto, a aceleração de A deveria ser maior do que a de B.

Concluimos que o atrito entre os blocos deverá ser estático e teremos de resolver novamente as equações 4 e 5 tendo em conta que agora  $F_a$  já não é proporcional à reacção normal. Assim, há três incógnitas nas duas equações (acelerações e força de atrito), faltando uma equação para podermos resolver o sistema. A equação que falta é a condição de que as acelerações dos dois blocos são iguais pelo facto de não escorregarem entre si:

$$a_B = a_A \quad (9)$$

Com essa relação, a solução das equações 4 e 5 é:

$$a_B = a_A = \frac{m_C}{m_A + m_B + m_C} g \quad (10)$$

Substituindo os valores das massas dos blocos e do cilindro (2,5 kg), obtêm-se uma aceleração igual a 0,111 g.

A condição para que essa solução seja válida é que a força de atrito estático não ultrapasse o valor máximo  $\mu_e R_n$ ; combinando esta condição com as equações 4, 10 e 2, obtemos:

$$\frac{m_B m_C}{m_A (m_A + m_B + m_C)} < \mu_e \quad (11)$$

que é válida neste caso: o lado esquerdo é 0,333, que é menor que o coeficiente de atrito estático, 0,5.

Quando a massa do cilindro for 3,5 kg, substituindo nas equações 6 e 7, obtemos os valores:

$$a_B = 0,133 g \quad a_A = 0,176 g \quad (12)$$

Esta solução é possível, já que a aceleração do bloco B é menor que a do bloco A, em forma consistente com o facto de que o bloco A desliza sobre o bloco B. Mas há um pormenor que tem de ser tido em conta: se a solução em que os dois blocos se deslocam conjuntamente, sem escorregamento relativo, também for factível, então essa será a verdadeira solução, já que os blocos têm a mesma velocidade inicial e continuariam sempre com velocidades iguais.

Substituindo o valor de 3,5 kg para a massa do cilindro, na equação 11, o lado esquerdo da equação é igual a 0,45, que é menor que o coeficiente de atrito estático, 0,5. Consequentemente, a aceleração dos dois blocos é igual e, a partir da equação 10, é:

$$a_B = a_A = 0,149 g \quad (13)$$

A solução 12 seria possível unicamente se em algum momento fosse dado um pequeno impulso adicional ao bloco A para começar a escorregar em relação ao bloco B.

## 2. Diferentes mecanismos de atrito

Uma questão que causa confusão entre os alunos de Física é: porque é que são usados pneus tão largos e lisos nos automóveis de Fórmula 1? Parece existir contradição com duas leis do atrito: a força de atrito não depende da área das superfícies em contacto e o coeficiente de atrito é menor quanto mais “lisas” forem as superfícies.

O mecanismo do atrito entre a estrada e os pneus é diferente no caso de um automóvel normal e de um automóvel de corridas de Fórmula 1 (figura 2). Nos pneus do automóvel normal, numa estrada seca e bem pavimentada, o mecanismo é mais semelhante ao caso do atrito seco; nomeadamente, a força de atrito cinético e a força máxima de atrito estático são directamente proporcionais à reacção normal e ao respectivo coeficiente de atrito. O facto do pneu ser mais largo ou mais estreito ou de ter ou não ter sulcos não altera a força de atrito.

No entanto, a largura dos pneus e a existência de sulcos na sua superfície podem aumentar significativamente a força de atrito, aumentando a segurança em situações de estradas molhadas, com gelo ou com poeira; nesses casos já não se trata de atrito seco. A água reduz drasticamente a adesão entre a borracha dos pneus e a estrada; os sulcos ajudam a afastar a água da superfície de contacto.



**Figura 2:** Os pneus de um automóvel normal e de um automóvel de corridas de Fórmula 1 são diferentes porque usam mecanismos de atrito diferentes.

A borracha usada nos pneus dos automóveis das corridas de Fórmula 1 derrete mais facilmente com o aquecimento. Isso faz com que o pneu cole mais ao pavimento, produzindo coeficientes de atrito elevados, maiores que 1, permitindo acelerações superiores e travagens mais rápidas. Esse tipo de atrito já não é atrito seco; quanto mais largos e mais lisos forem os pneus, o resultado será melhor, já que a força com que a borracha se cola ao pavimento será maior. O desempenho desse tipo de pneus só será óptimo após várias voltas na corrida, quando tiverem alcançado uma temperatura mais elevada; nessas condições o desgaste também é muito maior.

A explicação dada nesta secção é apenas uma visão aproximada e qualitativa, já que os pneus de um automóvel são um sistema muito mais complexo. Se os pneus fossem rígidos, o atrito seria praticamente nulo quando o automóvel estivesse em movimento uniforme, numa superfície horizontal. A elasticidade dos pneus produz forças de atrito de rolamento, já que em cada rotação o pneu é continuamente deformado; o consumo adicional de energia devido a essas forças de atrito justifica-se pelo aumento do conforto para os passageiros e, principalmente, da maior segurança de um pneu deformável em relação a um pneu rígido. Em situações de perigo,

por exemplo, um tramo da estrada muito escorregadio, o automóvel pode ainda ser controlado em condições em que o coeficiente de atrito é quase nulo, devido à maior dissipação de energia num pneu deformável [1].

## 2.1. Força de resistência nos fluidos

A força de resistência ao movimento nos fluidos é produzida por dois mecanismos diferentes: o primeiro depende da viscosidade do fluido e deve-se ao facto de as camadas do fluido mais próximas se colarem ao corpo, acompanhando o seu movimento e criando atrito com outras camadas de fluido mais afastadas.

O segundo mecanismo tem a ver com a diferença de pressões gerada no fluido à frente e atrás do corpo. O fluido é comprimido na região da frente. Essa diferença de pressões produz uma força directamente proporcional ao quadrado da velocidade.

A força de resistência num fluido é sempre no sentido oposto à velocidade  $\vec{v}$  do corpo. A expressão geral para o módulo dessa força compreende um termo que depende linearmente em  $v$ , devido à viscosidade do fluido e outro termo quadrático em  $v$ , devido à compressão do fluido:

$$F_r = k \eta v + \frac{1}{2} C_D \rho A v^2 \quad (14)$$

onde  $k$  e  $C_D$  são duas constantes aerodinâmicas que dependem da forma e do tamanho do corpo,  $A$  é a área da secção transversal desse corpo,  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade do fluido e  $\rho$  a sua massa volúmica.

Quando a velocidade for suficientemente baixa, o termo dominante será o que depende da viscosidade. Se a velocidade for muito elevada, o termo dominante será o que depende da massa volúmica. O valor que delimita as velocidades pequenas das velocidades elevadas é a velocidade “crítica”,  $v_c$ , definida como o valor da velocidade em que os dois termos são iguais:

$$v_c = \frac{2k\eta}{C_D \rho A} \quad (15)$$

No caso de um corpo esférico com raio  $r$ , a constante  $k$  é igual a  $6\pi r$ , a constante  $C_D$  é aproximadamente 0,5 e a área da secção é  $\pi r^2$ . Assim, a velocidade crítica é dada pela expressão:

$$v_c = \frac{24\eta}{\rho r} \quad (16)$$

A tabela 1 mostra os valores obtidos para uma esfera de 1 mm de raio, dentro de glicerina, água e ar. Na glicerina, a velocidade crítica é elevada; isso implica que a força de resistência no fluido se deva, principalmente, à viscosidade. Uma esfera de 1 mm de raio, em queda livre dentro de glicerina, atinge uma velocidade-limite muito menor que a velocidade crítica e, assim, o termo da resistência dependente do quadrado da velocidade não chega a manifestar-se.

Dentro da água ou no ar, as velocidades críticas da esfera de 1 mm de raio são muito pequenas. Uma esfera desse tamanho, em queda livre, dentro de algum desses dois fluidos, rapidamente ultrapassa esse valor da velocidade crítica, passando a ser dominante o termo que depende da densidade do fluido e do quadrado da velocidade.

Fluido	Coef. de viscosidade /Pa s	Massa volúmica /kg m <sup>-3</sup>	$v_c$ /m s <sup>-1</sup>
Glicerina	1,5	1200	30
Água	$10^{-3}$	1000	0,024
Ar	$1,8 \times 10^{-5}$	1,2	0,36

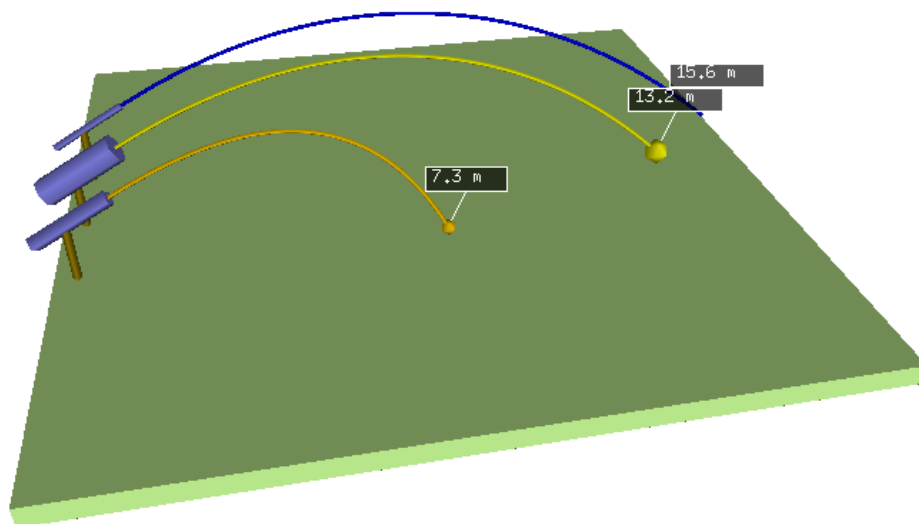
**Tabela 1:** Coeficiente de viscosidade, densidade e velocidade crítica de uma esfera de 1 mm de raio para alguns fluidos.

Se o raio da esfera for maior que 1 mm, as velocidades críticas serão ainda menores. Isso implica que no ar ou na água o termo que depende da viscosidade é ainda menos importante e na glicerina o termo que depende do quadrado da velocidade pode chegar a ser importante.

## 2.2. Lançamento de projecteis

No lançamento oblíquo de um projectil no ar, a força de resistência do ar será, como vimos, predominantemente dependente do quadrado da velocidade. Só se o projectil tiver um tamanho microscópico é que a força de resistência seria linear em função da velocidade, mas, nesse caso, o tamanho reduzido implica força de resistência desprezável.

Por exemplo, se o projectil for um electrão, numa trajectória de poucos metros, o efeito da resistência do ar não é visível. No entanto, se o projectil tiver um tamanho de alguns centímetros, a resistência do ar já é visível nos primeiros metros da trajectória.



**Figura 3:** Trajectória de um electrão, uma bola de ténis e uma bola de pingue-pongue, lançadas com a mesma velocidade inicial, desde a mesma altura.

A figura 3 mostra a trajectória de um electrão, uma bola de ténis e uma bola de pingue-pongue, que foram lançadas com o mesmo ângulo ( $30^\circ$ ) e a mesma velocidade inicial ( $12 \text{ m s}^{-1}$ ), desde uma altura de 2 m. O tamanho das esferas foi exagerado no desenho, mas no cálculo da força de resistência do ar foram usados valores realistas:  $r = 3,3 \text{ cm}$  para a bola de ténis e  $r = 1,9 \text{ cm}$

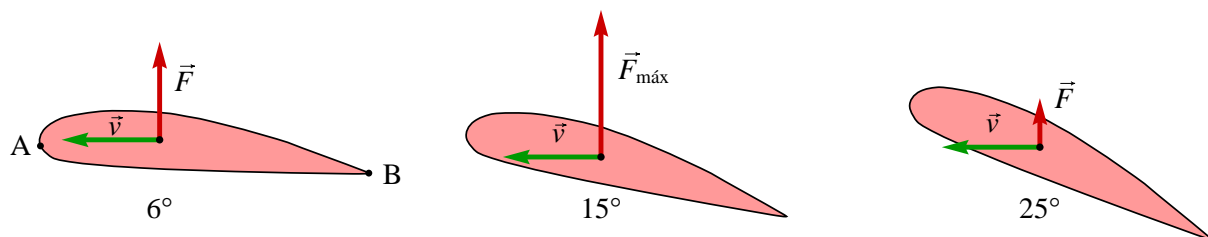
para a bola de pingue-pongue; 62 g para a massa da bola de ténis e 2,4 g para a massa da bola de pingue-pongue.

O alcance do electrão é 15,6 m, igual ao valor calculado para um projectil sem considerar a resistência do ar. A bola de ténis tem um alcance menor de 13,2 m e a bola de pingue-pongue apenas 7,3 m. Neste último caso, já é bem visível que a trajectória não é uma parábola.

### 3. O voo dos aviões

Uma explicação errada do mecanismo responsável pela força de flutuação na asa de um avião em voo está muito difundida em livros de Física<sup>1</sup> e em artigos na Internet. Em relação ao primeiro diagrama da figura 4, o erro consiste em admitir que duas partículas de ar que chegam simultaneamente ao ponto A, passando uma delas pela parte superior da asa e a outra pela parte inferior, deverão chegar ao mesmo tempo ao ponto B; argumenta-se assim que a maior curvatura na parte superior da asa implica uma velocidade maior e, portanto, menor pressão.

Essa explicação é errada. Não existe nenhuma razão física para que os tempos de passagem pelo percurso superior ou inferior tenham de ser iguais. De facto, a visualização das linhas de corrente do ar numa asa colocada num túnel de vento mostra que as partículas de ar que circulam pela parte superior da asa demoram menos tempo a percorrer a asa do que as partículas que circulam por baixo.



**Figura 4:** Para um dado valor da velocidade do avião, existe um ângulo de ataque máximo (neste caso 15°) em que a força de flutuação é máxima. Por cima desse valor, a turbulência na parte superior da asa é muito elevada e a força decresce bruscamente.

Outro argumento que mostra que essa explicação está errada é a existência de asas com perfis muito mais simétricos do que o da figura 4, que também produzem forças de sustentação. Observe, por exemplo, o perfil usado nas asas do avião supersónico na figura 5. Se as partículas de ar que passam por cima e por baixo da asa demorassem o mesmo tempo, as velocidades nos dois lados da asa seriam iguais. Os aviões de acrobacia também conseguem voar em posição invertida, mostrando que os perfis superior e inferior da asa podem ser trocados, obtendo-se força de sustentação nos dois casos.

Os dois factores mais importantes que determinam o módulo da força de sustentação na asa são a velocidade do avião e o ângulo de ataque. No lado esquerdo da figura 4, a asa tem um ligeiro ângulo de ataque, de 6°, para garantir a existência de força de sustentação. Com a mesma velocidade, se esse ângulo for aumentado, aumenta a força de sustentação; mas se o ângulo

<sup>1</sup>Eu próprio confesso ter cometido esse erro no passado [2] e aproveito para emendar e agradecer ao professor José Laginha Palma a gentileza de me alertar.



**Figura 5:** Um avião supersônico tem asas com um perfil mais fino e mais simétrico do que nos aviões comerciais.

for muito elevado, aparece turbulência na parte superior e perto do ponto B, que faz diminuir bruscamente a força de sustentação. No caso da figura, o ângulo de ataque em que se obtém a maior força de sustentação é  $15^\circ$ .

Quanto maior for a velocidade do avião maior será a força de sustentação, mas também aumentará a resistência do ar ao movimento do avião. Para diminuir a aparição de vórtices na asa do avião usa-se o perfil de asa arredondado à frente e muito estreito na parte de atrás [3].

Nos aviões supersônicos são formadas ondas de choque nos dois extremos da asa. Como não aparecem vórtices, é vantajoso usar um perfil de asa muito estreito; uma asa plana seria suficiente para obter a força de sustentação, reduzindo a resistência do ar [4]. Mas como o avião tem de voar também a velocidades menores que a velocidade do som, usa-se o perfil de asa ligeiramente curvado no centro (figura 5).

Há que ter em conta que o ar é um fluido, compressível e viscoso. Assim, não se verificam as condições para que a equação de Bernoulli seja válida. No entanto, a equação de Bernoulli pode ser utilizada para dar uma visão qualitativa da situação, embora não possa ser utilizada para obter valores quantitativos fiáveis.

## 4. As marés

Em muitas ocasiões somos confrontados com problemas de Física que sabemos resolver, mas que não são fáceis de explicar sem apresentar todos os cálculos. Um aluno que é confrontado pela primeira vez com esse tipo de problema ir-se-á distrair com os cálculos sem chegar a compreender os conceitos importantes subjacentes. Na Física de 12.º ano, julgamos mais importante dar ênfase aos fenómenos evitando entrar em cálculos matemáticos muito extensos.

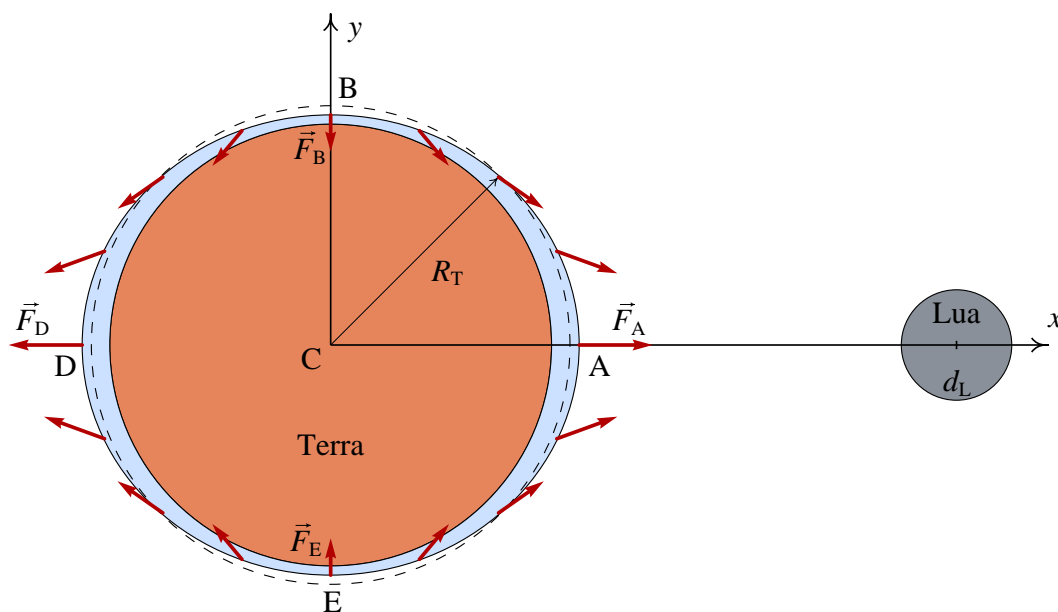
Podemos optar por não falar sobre esses problemas mais complicados ou tentar dar uma



explicação simples, evitando os cálculos extensos. Vamos ilustrar com um exemplo: a explicação da origem das marés. Apresentaremos primeiro uma explicação completa, mas sem pormenores matemáticos, e a seguir mostraremos os cálculos detalhados.

As forças que dão origem às marés são as forças inerciais devidas ao facto de o sistema Terra-Lua não ser um sistema inercial. O Sol também produz marés, mas comecemos por considerar apenas o sistema Terra-Lua e mais para a frente incluiremos o Sol. Nomeadamente, comecemos por admitir que o referencial fixo ao centro de massa do sistema Terra-Lua é um referencial inercial. As órbitas da Terra e da Lua nesse referencial inercial são produzidas pela atracção gravitacional entre elas.

No referencial não inercial fixo ao centro de massa da Terra, aparece uma força inercial. Nesse referencial, a acção da Lua sobre os objectos na Terra é essa força inercial mais a força de atracção gravitacional da Lua. A soma dessas duas forças está indicada pelos vectores na figura 6.



**Figura 6:** Acção da Lua em diferentes pontos da Terra. A circunferência a tracejado mostra o nível que a água dos oceanos teria se não existissem marés.

O resultado é diferente em diferentes pontos. Por exemplo, no centro da Terra (C na figura 6) a força é nula. Nos pontos A e D a força aponta na direcção da Lua, em sentidos opostos, mas com o mesmo módulo nos dois pontos. Nos pontos B e E, a força aponta para o centro da Terra e tem módulo exactamente igual a metade do módulo da força em A e D. Essas forças deformam a superfície do mar, que deixa de ser uma esfera (a tracejado na figura 6) e passa a ser um elipsóide.

Enquanto a Terra roda sobre o seu eixo durante um dia, um ponto na superfície do oceano passa uma vez perto<sup>2</sup> de cada um dos pontos A, B, D e E. Nos pontos B e E o nível da água desce até um valor mínimo e em A e D sobe até um nível máximo. Assim, observam-se duas marés por dia e a altura das marés é igual à diferença de alturas nos pontos A e B.

<sup>2</sup>Se o ponto estivesse no equador, passaria exactamente pelos pontos A, B, D e E.

No entanto, como o plano da órbita da Lua não coincide exactamente com o plano de rotação da Terra, um local geográfico estará mais perto de um dos pontos A ou D e uma das marés será alta e a outra mais baixa. A topografia da zona costeira também altera a altura das marés, devido à interferência com ondas reflectidas; em alguns locais essa interferência aumenta a altura das marés e noutros locais fá-la diminuir.

A altura  $h$  das marés, num ponto no equador e no mar aberto, sem interferência de ondas reflectidas, pode ser calculada em função da massa da Lua,  $M_L$ , da massa da Terra,  $M_T$ , do raio da Terra,  $R_T$ , e da distância entre a Terra e a Lua,  $d_L$ . O resultado obtido é:

$$h = \frac{3 M_L R_T^4}{2 M_T d_L^3} \quad (17)$$

Os valores numéricos das constantes que precisamos para calcular a altura das marés são:

$$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$M_L = 7,34 \times 10^{22} \text{ kg}$$

$$R_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$$

$$d_L = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$$

substituindo na equação 17, é:

$$h \approx 0,54 \text{ m}$$

Falta também considerar o efeito das marés produzidas pelo Sol. Os cálculos são idênticos aos que fizemos no caso da Lua e, portanto, na equação 17 bastará substituir a massa da Lua pela massa do Sol, que é  $1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ , e a distância até à Lua pela distância até ao Sol, que é  $1,49 \times 10^{11} \text{ m}$ . O resultado obtido é um pouco menor que metade do obtido para a Lua:

$$h_S \approx 0,25 \text{ m}$$

Quando a Lua, a Terra e o Sol estão na mesma recta, as marés da Lua e do Sol somam-se, sendo a altura da maré resultante 79 cm. Isso acontece aproximadamente cada duas semanas, quando a Lua está na fase cheia ou nova. Quando a Lua está em quarto minguante ou quarto crescente, os máximos das marés do Sol coincidem com os mínimos das marés da Lua; o resultado é novamente duas marés por dia, mas a altura das marés é apenas de 29 cm.

Agora vamos mostrar como obter a equação 17 [5]. Esse cálculo será interessante para o professor ou para alunos mais avançados, mas não para um aluno com pouca experiência em mecânica newtoniana e análise matemática.

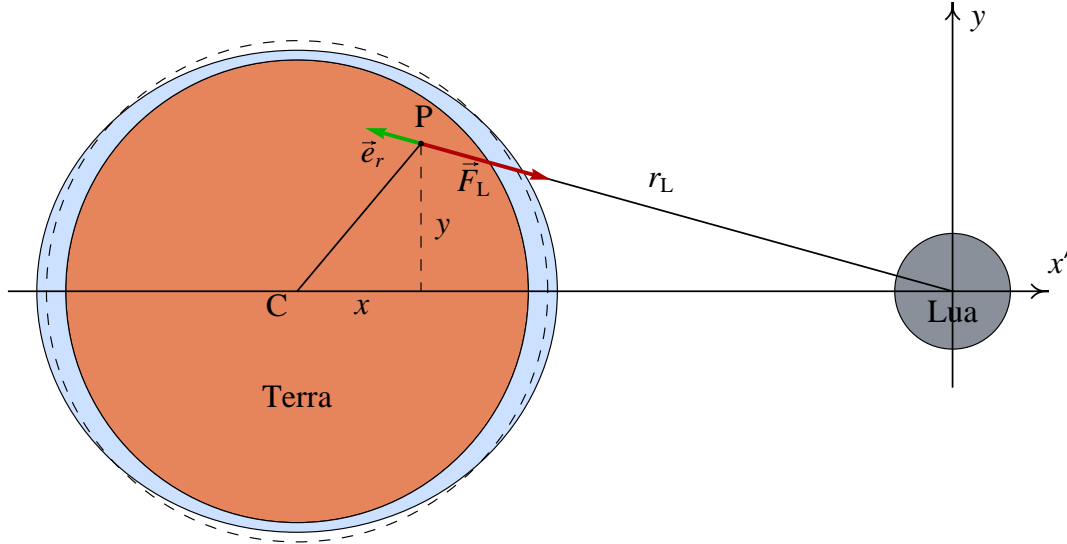
A força inercial no referencial da figura 6 é:

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_C \quad (18)$$

em que  $\vec{a}_C$  é a aceleração do centro de massa da Terra.

A força de atracção gravitacional da Lua sobre uma massa pontual  $m$ , num ponto P, é:

$$\vec{F}_L = \frac{GmM_L}{r_L^2} \vec{e}_L \quad (19)$$



**Figura 7:** Força gravitacional da Lua num ponto na Terra.

em que  $M_L$  é a massa da Lua,  $r_L$  a distância desde o ponto até o centro da Lua,  $G$  a constante de gravitação universal e  $\vec{e}_L$  um vetor que aponta desde o ponto até ao centro da Lua (figura 7).

No centro de massa da Terra, C, na figura 7, a força gravitacional é igual a:

$$\vec{F}_L(C) = \frac{GmM_L}{d_L^2} \vec{e}_x \quad (20)$$

onde  $d_L$  é a distância da Terra à Lua. Assim, a aceleração do centro de massa C é:

$$\vec{a}_C = \frac{GM_L}{d_L^2} \vec{e}_x \quad (21)$$

Para simplificar os cálculos a seguir, usaremos uma variável  $x' = x - d_L$  em vez de  $x$ , que equivale a deslocar a origem para a Lua. No sistema de coordenadas  $(x', y)$ , o vetor  $\vec{e}_L$  é na mesma direcção do vetor radial mas em sentido oposto:

$$\vec{e}_L = -\vec{e}_r = -\frac{x' \vec{e}_x + y \vec{e}_y}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$$

e a força gravitacional (equação 19) é igual a:

$$\vec{F}_L = -\frac{GmM_L}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} (x' \vec{e}_x + y \vec{e}_y) \quad (22)$$

Como as coordenadas  $x$  e  $y$  de qualquer ponto P na Terra são muito menores que  $d_L$ , podemos aproximar a expressão 22 pela sua série de Taylor, a partir do ponto C, mantendo unicamente os termos de primeira ordem. A expressão da série de Taylor, perto do ponto C, para uma função vectorial  $\vec{F}$  com componentes cartesianas  $F_x$  e  $F_y$  é:

$$\vec{F} \approx \vec{F}(C) + \left( \frac{\partial F_x}{\partial x'} \Big|_C x + \frac{\partial F_x}{\partial y} \Big|_C y \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x'} \Big|_C x + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Big|_C y \right) \vec{e}_y$$

As derivadas parciais das componentes cartesianas na equação 22 são as seguintes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_x}{\partial x'} &= \frac{GmM_L(2x'^2 - y^2)}{(x'^2 + y^2)^{5/2}} & \frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{3GmM_L x' y}{(x'^2 + y^2)^{5/2}} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x'} &= \frac{3GmM_L x' y}{(x'^2 + y^2)^{5/2}} & \frac{\partial F_y}{\partial y} &= \frac{GmM_L(2y^2 - x'^2)}{(x'^2 + y^2)^{5/2}}\end{aligned}$$

Substituindo as coordenadas do ponto C ( $x' = -d_L, y = 0$ ) e substituindo na série de Taylor obtemos a seguinte aproximação:

$$\vec{F}_L = \frac{GmM_L}{d_L^2} \left[ \left(1 + \frac{2x}{d_L}\right) \vec{e}_x - \frac{y}{d_L} \vec{e}_y \right] \quad (23)$$

Usando a expressão 21, a soma da força inercial (equação 18) mais a força gravítica (equação 23) é:

$$\vec{F} = \frac{GmM_L}{d_L^3} (2x\vec{e}_x - y\vec{e}_y) \quad (24)$$

Substituindo as coordenadas dos pontos A e B (figura 6) nessa expressão, vemos que em A a força aponta para a Lua e em B aponta para o centro da Terra e tem módulo igual a metade do módulo da força em A.

A força  $\vec{F}$  (equação 24), que tende a levantar a superfície da água nos pontos A e D, é contrariada pelo peso da água. Se  $h$  representar a altura da maré, nomeadamente a altura que uma massa  $m$  sobe quando passa do ponto B para o ponto A, o trabalho realizado pela força  $\vec{F}$  nessa subida será igual ao aumento de energia potencial gravítica:

$$W = mgh = \frac{GmM_T}{R_T^2} h \quad (25)$$

em que  $M_T$  e  $R_T$  são a massa e o raio médio da Terra.

O trabalho  $W$  também é igual ao integral de linha da força  $\vec{F}$  desde o ponto B até ao ponto A. A expressão obtida para a força, equação 24, indica que é uma força conservativa ( $\partial F_x/\partial y = \partial F_y/\partial x$ ). Consequentemente, o trabalho que realiza desde B até A pode ser calculado usando como percurso de integração o segmento de recta que vai desde B até C, seguido pelo segmento de recta desde C até A; assim<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned}W &= \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_B^C F_y dy + \int_C^A F_x dx = \frac{GmM_L}{d_L^3} \left[ - \int_{R_T}^0 y dy + 2 \int_0^{R_T} x dx \right] \\ &= \frac{3GmM_L R_T^2}{2d_L^3}\end{aligned} \quad (26)$$

Igualando as equações 25 e 26 obtemos a expressão 17. É de salientar que este resultado não depende do valor da constante de gravitação universal!

<sup>3</sup>Admitiremos que os pontos A e B se encontram ambos a uma distância  $R_T$  do centro da Terra, já que a altura  $h$  é desprezável em comparação com o raio da Terra.

## 5. A massa relativista

A expressão para a energia relativista de uma partícula é:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (27)$$

em que  $m$  é a sua massa em repouso e  $v$  o módulo da sua velocidade.

Apesar de a equação 27 estar bem corroborada experimentalmente, os físicos discordam na sua interpretação [6].

Alguns físicos adoptam a interpretação dada por Einstein nos seus primeiros artigos sobre a relatividade, nomeadamente que a massa da partícula é  $E/c^2$  e que aumenta com a velocidade. Para distinguir a massa em repouso, ou massa própria, usam a notação  $m_0$  e escrevem a equação 27 em alguma das duas formas equivalentes:

$$E = mc^2 \qquad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Outros físicos consideram a massa como uma propriedade implícita das partículas, que não aumenta com a velocidade. O próprio Einstein disse, em 1948, preferir esta interpretação e achar inconveniente admitir que a massa mude com a velocidade. Com esta interpretação, a famosa equação:

$$E = mc^2 \quad (28)$$

é válida unicamente no referencial em que a partícula está em repouso. Em outros referenciais, a expressão geral é a equação 27 e não é preciso colocar o subíndice 0 porque a massa não varia. Na prática, não é possível medir em forma separada  $m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . O que se mede no laboratório é a energia (equação 27) ou a quantidade de movimento:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

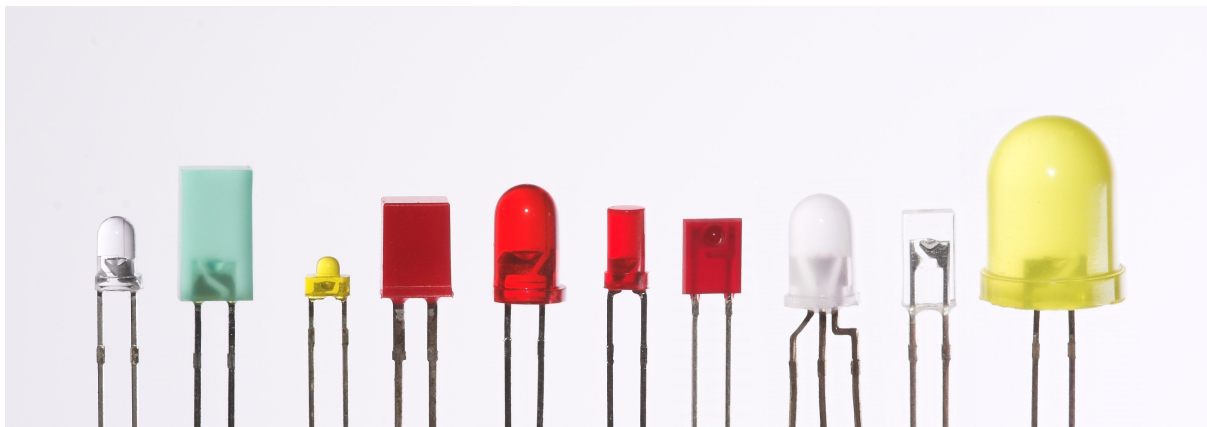
e, portanto, alguns autores consideram essa discrepância uma simples questão linguística [7]. Mas esta polémica tem consequências muito importantes por estar envolvido um conceito fundamental (massa). Na Física de partículas também não está totalmente resolvido o problema da massa das partículas e a sua relação com os campos.

## 6. Física moderna no laboratório

A questão problemática que tentaremos responder nesta secção é: como incluir alguma experiência de Física Moderna na Física de 12.º ano? Apesar de a Física Quântica estar presente em muitos fenómenos que fazem parte da nossa experiência quotidiana, não é fácil propor experiências relacionadas com a Física Quântica que possam ser realizadas sem usar equipamentos complicados.

Existe uma experiência simples que pode ser usada para medir a constante de Planck, a partir da característica tensão-corrente de um díodo emissor de luz (LED). Outra vantagem dessa experiência é que nela usa-se um circuito eléctrico que pode ser analisado no contexto do programa do 12.º ano. Essa experiência será descrita no fim desta secção, mas antes vamos fazer uma introdução breve sobre os LED.

## 6.1. Díodos emissores de luz



**Figura 8:** Vários tipos diferentes de LED.

Os díodos emissores de luz (LED) são díodos que produzem luz quando são polarizados em modo directo, passando corrente através deles. Para distinguir o cátodo do ânodo, o primeiro costuma ser um fio mais curto e estar perto de uma zona onde a cobertura plástica é plana. A figura 9 mostra um LED vermelho e o diagrama de circuito usado para representar os LED:



**Figura 9:** Díodo emissor de luz (LED) e diagrama de circuito.

A energia electrostática que os portadores de carga perdem na passagem da interface entre os dois semicondutores é transformada em luz. Essa energia corresponde à diferença entre dois níveis de energia no semicondutor e tem um valor específico determinado, próprio dos semicondutores usados no LED. Na teoria dos fotões, a energia de cada fotão é directamente proporcional à frequência da luz:

$$E = hf \quad (29)$$

onde  $h$  é a constante de Planck, com valor igual a  $6,626 \times 10^{-34}$  J s.

Consequentemente, os fotões emitidos no LED terão todos, aproximadamente, a mesma frequência, igual à diferença entre os níveis de energia dos electrões nos dois semicondutores, dividida pela constante de Planck; isso implica que o LED emita luz monocromática.

Quando circula corrente pelo LED, cada carga de condução que atravessar a interface do LED perderá uma energia correspondente à energia de um fotão. Assim, a curva característica do

LED será semelhante à característica de um receptor com ordenada na origem positiva e declive positivo constante [8].

A energia que um electrão perde, quando atravessa a diferença de potencial  $\varepsilon$ , na interface entre os dois semicondutores, é transformada na energia do fotão produzido. Assim:

$$e\varepsilon = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad (30)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz e  $\lambda$  o comprimento de onda da luz emitida. Resolvendo para  $h$ , temos:

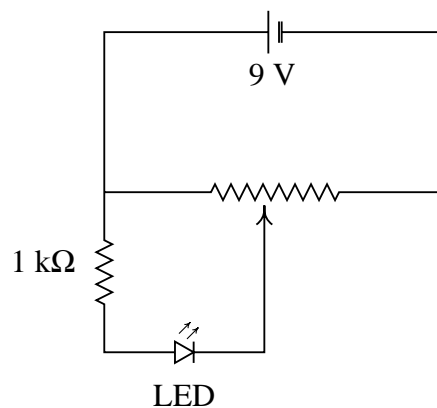
$$h = \frac{e\varepsilon\lambda}{c} \quad (31)$$

O valor de  $\varepsilon$  corresponde à ordenada na origem da característica tensão-corrente do LED. A cor da luz emitida pelo LED depende do material semiconductor usado no seu fabrico. A tabela 2 mostra as cores próprias de alguns semicondutores.

**Tabela 2:** Cores associadas a alguns semicondutores usados actualmente [9]

Semicondutor	Cor da luz	Comprimento de onda
Arseniato de gálio e alumínio	Infravermelha	880 nm
Arseniato de gálio e alumínio	Vermelha	645 nm
Fosfato de alumínio, índio e gálio	Amarela	595 nm
Fosfato de gálio	Verde	565 nm
Nitreto de gálio	Azul	430 nm

## 6.2. Característica de um LED



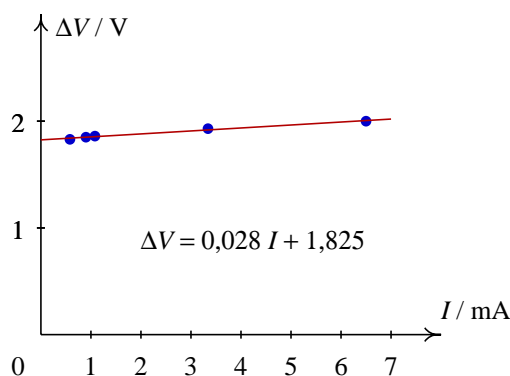
**Figura 10:** Circuito usado para determinar a característica de um LED.

Para obter experimentalmente a característica de um LED, podemos usar um potenciómetro como divisor de tensão para alimentar o LED, como se mostra no circuito da figura 10. A resistência de aproximadamente 1 kΩ é usada para evitar que a corrente no LED ultrapasse o

valor máximo recomendado, que é aproximadamente 30 mA. Se o LED estiver ligado no sentido correcto, deverá produzir luz.

Medem-se os valores da diferença de potencial e da corrente no LED, para diferentes valores da tensão. A figura 11 mostra o resultado dessa experiência, realizada com um LED vermelho. Para os dados experimentais apresentados na figura 11, o resultado da regressão linear produz:

$$\varepsilon = 1,825 \text{ V} \quad (32)$$



**Figura 11:** Característica tensão-corrente de um LED vermelho.

Portanto, a experiência anterior permite calcular a constante de Planck a partir da equação 31, usando o valor da carga elementar  $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$ , da velocidade da luz  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$ , e do comprimento de onda da luz dos LED vermelhos (tabela 2). O valor que obtemos é  $h = 6,28 \times 10^{-34} \text{ J s}$ , com um erro de apenas 5% em relação ao valor aceite actualmente,  $6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$ .

## Agradecimentos

Agradeço aos meus colegas Noemia Maciel e Carlos Azevedo o apoio dado na preparação deste artigo, ao Professor José Laginha Palma, quem me alertou para vários pontos problemáticos na Física de 12.º ano e aos Coordenadores de Edição da Porto Editora por terem feito uma revisão cuidadosa do manuscrito.

## Referências

- [1] F. P. Bowden e D. Tabor. *Friction; an Introduction to Tribology*, Heinemann Educational Books, Londres, 1973, páginas 138 a 143.
- [2] N. Maciel; M. M. Gradim; M. J. Campante e J. E. Villate. *Eu e a Física, 12.º ano*, Porto Editora, Porto, 2005, página 141.
- [3] T. E. Faber. *Fluid Dynamics for Physicists*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, página 271.



- [4] *Idem, ibidem*, página 115.
- [5] A. P. French. *Newtonian Mechanics*, W. W. Norton & Company, Nova Iorque, 1971, páginas 531-537.
- [6] E. Hecht. *Physics*, Wadsworth, Inc. California, 1994, páginas 1001 e 1002.
- [7] J. M. R. Rodrigues. *Introdução à Teoria da Relatividade Restrita*, IST Press, Lisboa, 1998, pág. 61.
- [8] S. Adams e J. Allday. *Advanced Physics*, Oxford University Press, Oxford, 2000, página 331.
- [9] *Idem, ibidem*, página 153.