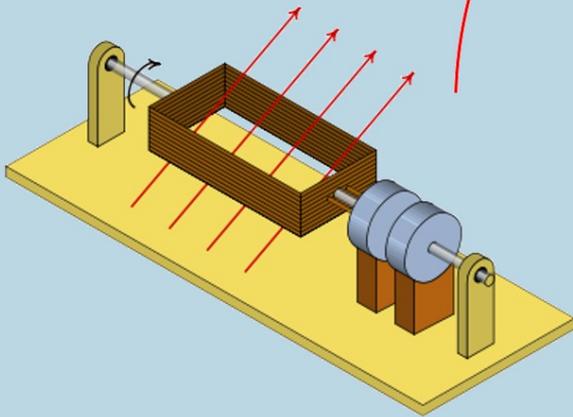
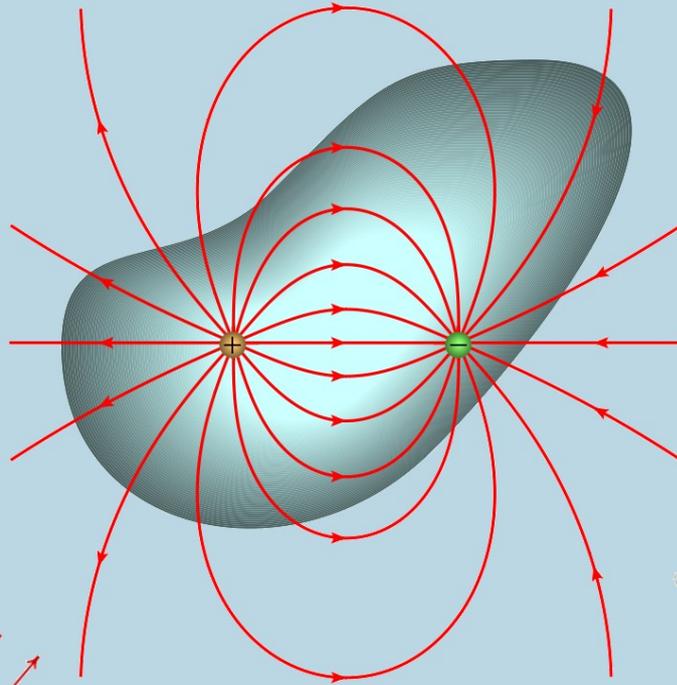


# Física 2

## ELETRICIDADE E MAGNETISMO



Jaime E. Villate



# **Física 2. Eletricidade e Magnetismo**

**Jaime E. Villate**  
Faculdade de Engenharia  
Universidade do Porto

<http://www.villate.org/livros>

## **Física 2. Eletricidade e Magnetismo**

Copyright © 2009-2012 Jaime E. Villate

E-mail: [villate@fe.up.pt](mailto:villate@fe.up.pt)

Versão: 8 de setembro de 2012

ISBN: 978-972-99396-2-4



Este livro pode ser copiado e reproduzido livremente, respeitando os termos da *Licença Creative Commons Atribuição-Partilha* (versão 2.5 Portugal). Para obter uma cópia desta licença, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/pt/>



ou envie uma carta para Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de símbolos e notações</b>	<b>ix</b>
<b>1. Carga e força elétrica</b>	<b>1</b>
1.1. Estrutura atômica . . . . .	2
1.2. Eletrização . . . . .	4
1.3. Propriedades da carga . . . . .	5
1.4. Força entre cargas pontuais . . . . .	6
1.5. Campo elétrico . . . . .	8
1.6. Condutores e Isoladores . . . . .	10
1.7. Carga por indução . . . . .	11
Perguntas . . . . .	13
Problemas . . . . .	14
<b>2. Potencial, corrente e força eletromotriz</b>	<b>15</b>
2.1. Potencial eletrostático . . . . .	16
2.2. Pilhas químicas . . . . .	19
2.3. Força eletromotriz . . . . .	20
2.4. Condutores e semicondutores . . . . .	23
2.5. Corrente elétrica . . . . .	26
2.6. Potencial e campo nos condutores . . . . .	27
2.7. Potência elétrica . . . . .	28
Perguntas . . . . .	30
Problemas . . . . .	31
<b>3. Resistência elétrica</b>	<b>33</b>
3.1. Características tensão-corrente . . . . .	34
3.2. Lei de Ohm . . . . .	34
3.3. Característica de uma bateria . . . . .	35
3.4. Código de cores . . . . .	37
3.5. Resistividade . . . . .	38
3.6. Supercondutividade . . . . .	41
3.7. Associações de resistências . . . . .	43
Perguntas . . . . .	46
Problemas . . . . .	47

<b>4. Condensadores</b>	<b>49</b>
4.1. Capacidade de um condutor isolado . . . . .	50
4.2. Esfera condutora isolada . . . . .	50
4.3. Condensadores . . . . .	51
4.3.1. Condensador plano . . . . .	54
4.3.2. Ultracondensadores . . . . .	56
4.4. Energia elétrica armazenada num condensador . . . . .	57
4.5. Associações de condensadores . . . . .	59
Perguntas . . . . .	61
Problemas . . . . .	61
<b>5. Circuitos de corrente contínua</b>	<b>63</b>
5.1. Diagramas de circuito . . . . .	64
5.2. Leis dos circuitos . . . . .	65
5.3. Método das malhas . . . . .	66
5.4. Princípio de sobreposição . . . . .	71
5.5. Circuitos com condensadores . . . . .	72
Perguntas . . . . .	77
Problemas . . . . .	77
<b>6. Campo elétrico</b>	<b>79</b>
6.1. Campo elétrico produzido por cargas pontuais . . . . .	80
6.2. Propriedades das linhas de campo elétrico . . . . .	82
6.3. Fluxo elétrico . . . . .	84
6.4. Lei de Gauss . . . . .	86
6.4.1. Campo de um plano . . . . .	88
6.4.2. Campo de um fio retilíneo . . . . .	89
6.4.3. Campo de uma esfera condutora . . . . .	90
Perguntas . . . . .	90
Problemas . . . . .	91
<b>7. Potencial eletrostático</b>	<b>93</b>
7.1. Potencial e campo elétrico . . . . .	94
7.2. Potencial devido a cargas pontuais . . . . .	96
7.3. Superfícies equipotenciais . . . . .	97
7.4. Pontos críticos do potencial . . . . .	99
7.5. Potencial e energia eletrostática . . . . .	100
7.6. Potencial nos condutores . . . . .	100
7.6.1. Potencial de uma esfera condutora . . . . .	103
Perguntas . . . . .	104
Problemas . . . . .	105
<b>8. Campo magnético</b>	<b>107</b>
8.1. Força magnética . . . . .	108

8.2. Força magnética sobre condutores com corrente . . . . .	110
8.3. Momento magnético . . . . .	111
8.4. Força magnética sobre partículas com carga . . . . .	114
8.5. Campo magnético de um fio com corrente . . . . .	116
8.6. Força entre condutores com corrente . . . . .	120
Perguntas . . . . .	120
Problemas . . . . .	121
<b>9. Indução eletromagnética</b>	<b>123</b>
9.1. Campo elétrico induzido . . . . .	124
9.2. Gerador de Faraday . . . . .	126
9.3. Lei de Faraday . . . . .	127
9.4. Gerador de tensão alternada . . . . .	130
9.5. Indutância . . . . .	131
9.6. Autoindução . . . . .	132
9.7. Circuitos de corrente contínua com indutores . . . . .	133
Perguntas . . . . .	136
Problemas . . . . .	137
<b>10. Processamento de sinais</b>	<b>139</b>
10.1. Circuito RC . . . . .	140
10.2. Equações diferenciais dos circuitos . . . . .	141
10.3. Unidades de tempo e frequência . . . . .	144
10.4. Impedância . . . . .	145
10.5. Associações de impedâncias . . . . .	146
10.6. Função de transferência . . . . .	154
Perguntas . . . . .	157
Problemas . . . . .	157
<b>11. Circuitos de corrente alternada</b>	<b>159</b>
11.1. Circuito LC . . . . .	160
11.2. Funções sinusoidais . . . . .	161
11.3. Fasores . . . . .	162
11.4. Tensão alternada . . . . .	164
11.5. Impedância complexa . . . . .	165
11.6. Potência dissipada nos circuitos . . . . .	171
11.7. Filtros de frequência . . . . .	172
11.8. Ressonância . . . . .	175
Perguntas . . . . .	177
Problemas . . . . .	177
<b>12. Ondas eletromagnéticas e luz</b>	<b>179</b>
12.1. Equações de Maxwell . . . . .	180
12.2. Campos induzidos . . . . .	182

---

12.3. Campo eletromagnético no vazio . . . . .	183
12.4. Ondas planas polarizadas . . . . .	185
12.5. Ondas harmônicas . . . . .	188
12.6. Espectro eletromagnético . . . . .	189
12.7. Teoria ondulatória da luz . . . . .	191
12.8. Teoria corpuscular da luz . . . . .	192
12.9. Diodos emissores de luz (LED) . . . . .	194
Perguntas . . . . .	196
Problemas . . . . .	197
<b>A. Transformadas de Laplace</b>	<b>199</b>
A.1. Propriedades da transformada de Laplace . . . . .	200
A.1.1. Linearidade . . . . .	200
A.1.2. Derivada da transformada . . . . .	200
A.1.3. Transformada da derivada . . . . .	200
A.1.4. Deslocamento na frequência . . . . .	200
A.1.5. Deslocamento no tempo . . . . .	201
A.2. Transformadas de funções importantes . . . . .	201
A.2.1. Polinômios . . . . .	201
A.2.2. Funções exponenciais . . . . .	202
A.2.3. Funções sinusoidais . . . . .	202
A.2.4. Impulso unitário . . . . .	203
<b>B. Constantes e dados numéricos</b>	<b>205</b>
<b>C. Créditos fotográficos</b>	<b>207</b>
<b>Respostas das perguntas e problemas</b>	<b>209</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>219</b>
<b>Índice</b>	<b>221</b>

# Prefácio

O objetivo deste manual é preparar os estudantes para que possam compreender o funcionamento dos dispositivos elétricos e eletrônicos com que são confrontados na sua experiência cotidiana e os que venham a aparecer no futuro.

Este livro foi escrito como texto de apoio para a disciplina de Física 2, do segundo ano do Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação, na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Durante vários anos tenho lecionado um semestre de Eletromagnetismo, para alunos do segundo ano de Engenharia. Nos últimos anos temos introduzido algumas alterações no programa, para se enquadrar melhor com os novos programas do Ensino Secundário e os novos planos de estudo do Mestrados Integrados em Engenharia. Uma abordagem abstrata, baseada no estudo das equações de Maxwell, já não se enquadra dentro desses novos planos de estudo.

Por outra parte, a mudança rápida na tecnologia implica que alguns tópicos perdem interesse e outros tornam-se mais importantes. Por exemplo, os livros tradicionais de Física Universitária costumam abordar o funcionamento de um tubo de raios catódicos, mas não falam dos cristais líquidos nem dos LED. Na época em que foram escritos, os cristais líquidos e os LED provavelmente já tinham sido inventados mas não estavam a ser usados comercialmente, enquanto que qualquer aluno estaria familiarizado com o tubo de raios catódicos do televisor. Hoje em dia a situação é diferente; é cada vez mais difícil encontrar monitores ou televisores com tubos de raios catódicos, mas estamos rodeados de ecrãs de cristais líquidos (LCD) e díodos emissores de luz (LED). Tornou-se muito mais importante falar de cristais líquidos e díodos emissores de luz do que o tubo de raios catódicos.

Na sequência da disciplina de Física 1, em que são usadas de forma intensiva as ferramentas de software, aqui também é feito algum uso moderado do Sistema de Álgebra Computacional *Maxima* e são usados alguns conceitos simples de sistemas dinâmicos.

Nos quatro primeiros capítulos é feita uma introdução à eletrostática e à eletricidade de forma prática. O capítulo 5 é sobre teoria de circuitos de corrente contínua. Nos capítulos 6 e 7 são estudados o campo e o potencial elétrico de forma mais geral. Os capítulos 8 e 9 estão dedicados ao campo magnético e a indução eletromagnética. Os capítulos 10 e 11 são também sobre teoria de circuitos, mas com tensões variáveis. No capítulo 10 é feita uma introdução ao processamento de sinais e no capítulo 11 são estudados os circuitos de corrente alternada e os filtros de frequências. Finalmente, no capítulo 12 são estudadas as ondas eletromagnéticas e a dualidade onda-partícula da luz.

Nesta edição de 8 de setembro de 2012 foi dada uma maior ênfase à teoria de circuitos, com

mais exemplos e problemas, e com várias novas seções: método de sobreposição, cálculo de correntes e cargas iniciais e finais nos circuitos de corrente contínua com condensadores e indutores e circuito LC. Para que o material do livro possa ser abordado num semestre, foi preciso eliminar outras seções: díodos e motores de corrente contínua.

Foram também eliminadas as seções das atividades práticas no início de cada capítulo. Algumas dessas atividades foram integradas no texto do capítulo ou em algum exemplo. Essas propostas de atividades práticas serão distribuídas em outro documento separado.

Devo agradecer os meus alunos pela sua valiosa ajuda na correção de muitos erros e gralhas e pelo seu entusiasmo e interesse que têm sido fonte de inspiração para escrever este livro. São muitos alunos para indicar todos os seus nomes aqui. Agradeço também aos meus colegas com quem temos leccionado as disciplinas de Física 1 e 2, João Carvalho e Francisco Salzedas.

Jaime E. Villate

Porto, 8 de setembro de 2012.

# Lista de símbolos e notações

$A, B \dots$	pontos no espaço, curvas, superfícies e sólidos
$\mathbb{A}, \mathbb{B} \dots$	fasores
$A, B \dots a, b \dots$	unidades
$\vec{A}, \vec{B} \dots \vec{a}, \vec{b} \dots$	vetores
$A, B \dots a, b \dots$	variáveis, funções ou módulos dos respetivos vetores
$\frac{d}{dt}$	derivada ordinária
$\frac{\partial}{\partial t}$	derivada parcial
$f', f'' \dots$	derivadas da função $f$ de uma variável
$\tilde{f}$ ou $\mathcal{L}\{f\}$	transformada de Laplace da função $f$
$\bar{f}$	valor médio da função $f$
$f_{ef}$	valor eficaz da função periódica $f$
$f_{m\acute{a}x}$	valor máximo da função sinusoidal $f$
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	produto escalar entre vetores
$a \cdot b$	produto entre unidades
$\vec{a} \times \vec{b}$	produto vetorial entre vetores
$3.5 \times 2.4$	produto entre números
$A$	área de uma superfície
$A$	ampere (unidade SI de corrente)
$\vec{a}$	vetor aceleração
$\vec{B}$	campo magnético
$C$	capacidade elétrica
$C$	coulomb (unidade SI de carga)
$c$	velocidade da luz
$c$	prefixo centi ( $10^{-2}$ )
$d$	distância
$d$	prefixo deci ( $10^{-1}$ )
$\vec{E}$	campo elétrico
$e$	carga elementar
$e$	número de Euler (base dos logaritmos naturais)
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	versores cartesianos nos eixos $x$ , $y$ e $z$
$\vec{e}_n$	versor normal a uma superfície

---

$E_{\text{máx}}$	rigidez dielétrica
eV	eletrão-volt (unidade de energia)
$\vec{F}$	força
F	farad (unidade SI de capacidade)
$f$	frequência
G	gauss (unidade de campo magnético) ou prefixo giga ( $10^9$ )
$\vec{g}$	campo gravítico
g	grama (unidade de massa)
$\tilde{H}$	função de transferência
H	henry (unidade SI de indutância)
$h$	constante de Planck
h	hora (unidade de tempo)
Hz	hertz (unidade SI de frequência)
$I$	corrente elétrica
$i$	número imaginário $\sqrt{-1}$
J	joule (unidade SI de trabalho e energia)
$K$	constante dielétrica
K	kelvin (unidade SI de temperatura)
$k$	constante de Coulomb
k	prefixo quilo ( $10^3$ )
$k_m$	constante magnética
$L$	indutância ou comprimento
$M$	indutância mútua
M	prefixo mega ( $10^6$ )
$\vec{m}$	momento magnético
$m$	massa
m	metro (unidade SI de comprimento) ou prefixo mili ( $10^{-3}$ )
N	newton (unidade SI de força)
n	prefixo nano ( $10^{-9}$ )
$P$	potência
p	prefixo pico ( $10^{-12}$ )
$Q$ ou $q$	carga
$r$ ou $R$	resistência ou raio
$R$	função resposta de frequência
$\vec{r}$	vetor posição
$s$	distância percorrida ou parâmetro das transformadas de Laplace
s	segundo (unidade SI de tempo)
$T$	período de uma onda harmônica ou temperatura
T	tesla (unidade SI de campo magnético)
$t$	tempo
$t_C, t_L$	constantes de tempo
$U_e$	energia potencial eletrostática
$U_g$	energia potencial gravítica

---

$V$	potencial
$V$	volt (unidade SI de potencial)
$\vec{v}$	vetor velocidade
$W$	watt (unidade SI de potência)
$X$	reatância
$x, y, z$	coordenadas cartesianas
$Z$	impedância
$\alpha$	coeficiente de temperatura
$\Delta$	aumento de uma grandeza física
$\varepsilon$	força eletromotriz
$\varepsilon'$	força contra-eletromotriz
$\Phi_e$	fluxo elétrico
$\Phi_m$	fluxo magnético
$\varphi$	fase inicial
$\lambda$	carga linear ou comprimento de onda
$\mu$	permeabilidade magnética
$\mu$	prefixo micro ( $10^{-6}$ )
$\pi$	valor em radianos de um ângulo de $180^\circ$
$\rho$	carga volúmica ou resistividade
$\sigma$	carga superficial
$\vec{\tau}$	torque
$\omega$	velocidade angular ou frequência angular
$\Omega$	ohm (unidade SI de resistência)
$^\circ$	grau (unidade de ângulo)
$^\circ\text{C}$	grau Celsius (unidade de temperatura)



# 1. Carga e força elétrica



A fotografia mostra a **máquina de Wimshurst**, inventada na década de 1880. Já no século XVIII existiam outras máquinas eletrostáticas usadas para gerar cargas eletrostáticas, usando o atrito; a inovação introduzida pela máquina de Wimshurst foi a separação de cargas usando **indução eletrostática**, em vez de atrito, conseguindo assim produzir cargas muito mais elevadas por meios mecânicos. Há muitos mecanismos envolvidos no funcionamento da máquina de Wimshurst, que serão estudados nos próximos capítulos: garrafa de Leiden, rigidez dielétrica, etc.

A transferência de cargas elétricas é um fenômeno que está presente na nossa experiência cotidiana, especialmente nos dias em que o ar está mais seco. Uma forma fácil de visualizar esse fenômeno é usando fita-cola. Cole aproximadamente 15 cm de fita-cola num lápis ou caneta, de forma a que, segurando no lápis, possa aproximar a fita-cola de outros objetos para observar a força entre a fita-cola e os objetos. Aproxime a fita-cola sempre pelo lado que não tem cola, para evitar que fique colada, e tente evitar que toque outros objetos, para não perder a carga acumulada nela.



**Figura 1.1.:** Força repulsiva entre pedaços de fita cola com cargas do mesmo sinal, e força atrativa entre pedaços com cargas de sinais opostos.

Comece por observar a força entre a fita-cola e outros objetos. O acetato do qual é feito a fita-cola adquire cargas elétricas facilmente. O simples facto de descolar um pedaço do rolo, faz com que fique com alguma carga; outros objetos, como a mesa, um caderno, etc., geralmente não têm qualquer carga elétrica.

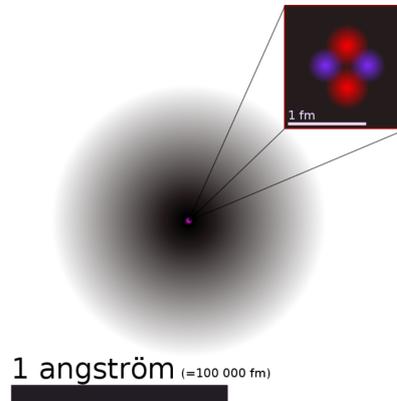
Para observar a força entre diferentes cargas elétricas, cole dois pedaços de fita cola à mesa, cada um colado a um lápis que permita puxar a fita-cola, descolando-la da mesa e a seguir colocar o lápis por baixo dum livro na borda da mesa, ficando a fita-cola pendurada livremente para poder aproximar outros objetos dela. Observe a força entre os dois pedaços.

Repita a experiência com quatro pedaços de fita-cola, dois deles colados à mesa, e outros dois colados por cima dos primeiros. Para cada par de pedaços, descole o conjunto da mesa, enquanto descola os dois pedaços entre si. Em cada par de pedaços, o que estava por cima e o que estava por baixo ficam com cargas opostas (positiva ou negativa). Observe as forças entre as pedaços com cargas do mesmo sinal ou de sinais opostos. Observe também a força entre os pedaços de fita-cola com carga positiva ou negativa, e outros objetos sem carga.

## 1.1. Estrutura atômica

Toda a matéria é formada por átomos. Cada átomo tem um núcleo com dois tipos de partículas, **prótons** e **neutrões**, muito perto uns dos outros. Entre os prótons existe uma

força repulsiva designada de **força elétrica**. Entre neutrões não existe esse tipo de força, e entre um neutrão e um próton também não.



**Figura 1.2.:** Átomo de Hélio com dois elétrões e dois prótões mais dois neutrões no núcleo.

À volta do núcleo existem partículas muito mais pequenas, os eletrões, com massa 2 000 vezes menor que a do prótão ou neutrão, a uma distância aproximadamente 100 000 maior que o tamanho do núcleo. Entre dois eletrões observa-se uma força elétrica repulsiva da mesma natureza e grandeza que a força entre dois prótões. Entre um prótão e um eletrão existe também uma força semelhante, da mesma grandeza, contudo, atrativa em vez de repulsiva. Por tanto, existem dois tipos diferentes de carga elétrica, a dos prótões e a dos eletrões; a força entre cargas semelhantes é repulsiva, enquanto que a força entre cargas diferentes é atrativa.

Um átomo com igual número de prótões e de eletrões (átomo neutro) não produz forças elétricas sobre outras partículas. Consequentemente, as duas cargas têm sido designadas de **positiva** e **negativa**; o facto de que as forças entre eletrões ou prótões tenham a mesma intensidade, é devido a que a carga de um eletrão, é exatamente igual à do prótão, em valor absoluto, mas com sinal oposto. A carga total nula de um átomo neutro é, por tanto, consequência de que a soma das cargas dos eletrões e prótões seja nula. A convenção que foi adoptada historicamente é que os eletrões têm carga negativa e os prótões carga positiva.

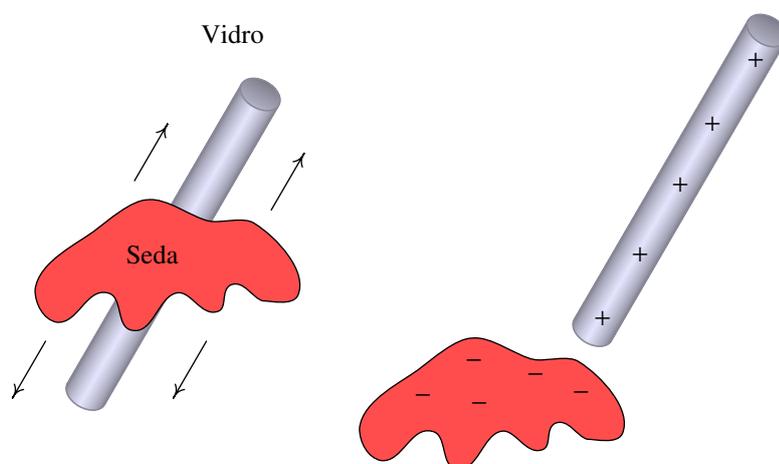
A unidade usada para medir a carga é o **coulomb**, indicado com a letra C. A carga de qualquer prótão é sempre igual e designada de **carga elementar**:

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (1.1)$$

os eletrões têm também todos a mesma carga, exatamente igual a  $-e$ .

## 1.2. Eletrização

É preciso uma energia muito elevada para conseguir remover um próton, ou neutrão, do núcleo. Isso só acontece no interior das estrelas, na camada mais externa da atmosfera, onde chocam partículas cósmicas com muita energia, ou nos aceleradores de partículas, onde os físicos conseguem reproduzir as energias no interior de uma estrela. No entanto, é mais fácil extrair elétrons de um átomo, ficando um **ião** positivo, com excesso de prótons, ou transferir mais elétrons para um átomo neutro, ficando um ião negativo, com excesso de elétrons.



**Figura 1.3.:** Barra de vidro carregada esfregando-a com um pano de seda.

De facto, sempre que dois objetos diferentes entram em contato muito próximo, passam elétrons dos átomos de um dos objetos para o outro. O objeto que for mais susceptível a perder elétrons ficará **eletrizado** com carga positiva ( $n$  prótons a mais) e o objeto que for menos susceptível a perder os seus elétrons ficará com a mesma carga, mas negativa ( $n$  elétrons a mais).

No caso da fita-cola, o contato próximo com outros objetos, devido à cola, faz passar elétrons de um para o outro. A fricção entre dois objetos faz também aumentar a passagem de elétrons de um objeto para o outro, sendo usada como método para eletrizar objetos. Os diferentes materiais podem ser ordenados numa **série triboelétrica** (tabela 1.1), em que os materiais no topo da série são mais susceptíveis a ficar com carga positiva e os materiais no fim da lista têm uma maior tendência a ficar com carga negativa.

Por exemplo, se uma barra de vidro for esfregada com um pano de seda, a barra fica carregada com carga positiva e a seda com carga negativa, porque o vidro está por cima da seda na série triboelétrica. Mas se a mesma barra de vidro for esfregada com uma pele de coelho, a barra fica com carga negativa, e a pele com carga positiva, porque a pele de coelho está por cima do vidro na série triboelétrica.

**Tabela 1.1.:** Série triboelétrica.

---

Pele de coelho
Vidro
Cabelo humano
Lã
Chumbo
Seda
Alumínio
Papel
Madeira
Cobre
Prata
Borracha
Acetato
Esferovite
Vinil (PVC)

---

### 1.3. Propriedades da carga

A carga elétrica é uma propriedade intrínseca da matéria, assim como a massa. A diferença da massa, existem dois tipos de cargas diferentes e existem partículas sem nenhuma carga. Duas propriedades muito importantes da carga elétrica são a sua quantização e a sua conservação.

**Quantização da carga.** Nas colisões entre partículas a altas energias são produzidas muitas outras novas partículas, diferentes dos elétrons, prótons e nêutrons. Todas as partículas observadas têm sempre uma carga que é um múltiplo inteiro da carga elementar  $e$  (equação 1.1). Assim, a carga de qualquer objeto é sempre um múltiplo inteiro da carga elementar.

Nas experiências de eletrostática, as cargas produzidas são normalmente equivalentes a um número muito elevado de cargas elementares. Por tanto, nesse caso é uma boa aproximação admitir que a carga varia continuamente e não de forma discreta.

**Conservação da carga.** Em qualquer processo, a carga total inicial é igual à carga final. No caso dos fenômenos em que existe transferência de elétrons entre os átomos, isso é claro que tenha que ser assim. No caso da criação de novas partículas não teria que ser assim, mas de facto em todos os processos observados nos raios cósmicos, e nos aceleradores de partículas, existe sempre conservação da carga; se uma nova partícula for criada, com carga negativa, será criada uma outra partícula com carga positiva.

## 1.4. Força entre cargas pontuais

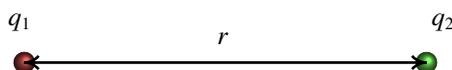
No século XVIII Benjamin Franklin descobriu que as cargas elétricas colocadas na superfície de um objeto metálico podem produzir forças elétricas elevadas nos corpos no exterior do objeto, mas não produzem nenhuma força nos corpos colocados no interior.

No século anterior Isaac Newton já tinha demonstrado de forma analítica que a força gravítica produzida por uma casca oca é nula no seu interior. Esse resultado é consequência da forma como a força gravítica entre partículas diminui em função do quadrado da distância.

Concluiu então Franklin que a força elétrica entre partículas com carga deveria ser também proporcional ao inverso do quadrado da distância entre as partículas. No entanto, uma diferença importante entre as forças elétrica e gravítica é que a força gravítica é sempre atrativa, enquanto que a força elétrica pode ser atrativa ou repulsiva:

- A força elétrica entre duas cargas com o mesmo sinal é repulsiva.
- A força elétrica entre duas cargas com sinais opostos é atrativa.

Vários anos após o trabalho de Franklin, Charles Coulomb fez experiências para estudar com precisão o módulo da força eletrostática entre duas cargas pontuais<sup>1</sup>



**Figura 1.4.:** Duas cargas pontuais, separadas por uma distância  $r$ .

A **lei de Coulomb** estabelece que o módulo da força elétrica entre duas cargas pontuais é diretamente proporcional ao valor absoluto de cada uma das cargas, e inversamente proporcional à distância ao quadrado

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{K r^2} \quad (1.2)$$

onde  $r$  é a distância entre as cargas (figura 1.4),  $q_1$  e  $q_2$  são as cargas das duas partículas,  $k$  é uma constante de proporcionalidade designada de **constante de Coulomb**, e  $K$  é a **constante dielétrica** do meio que existir entre as duas cargas. A constante dielétrica do vácuo é exatamente igual a 1, e a constante do ar é muito próxima desse valor; assim, se entre as cargas existir ar,  $K$  pode ser eliminada na equação 1.2. No sistema internacional de unidades, o valor da constante de Coulomb é:

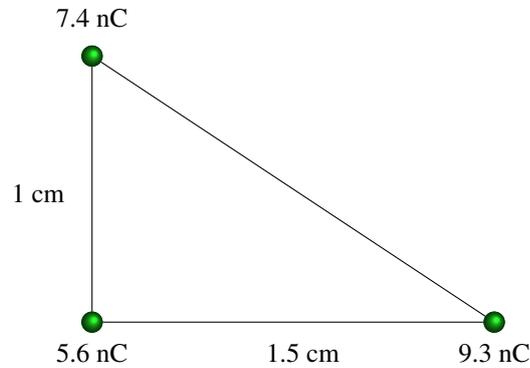
$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \quad (1.3)$$

Outros meios diferentes do ar têm constantes dielétricas  $K$  sempre maiores que o ar; conseqüentemente, a força elétrica será mais fraca se as cargas pontuais forem colocadas dentro de um meio diferente do ar.

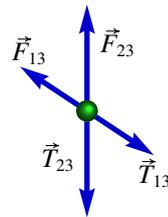
<sup>1</sup>Uma carga pontual é uma distribuição de cargas numa pequena região do espaço.

**Exemplo 1.1**

Três cargas pontuais estão ligadas por fios que formam um triângulo retângulo, como mostra a figura. (a) Calcule a tensão no fio que liga as cargas de 7.4 nC e 9.3 nC. (b) Se a carga de 5.6 nC fosse retirada, a tensão calculada na alínea a aumentava ou diminuía?



**Resolução.** (a) O diagrama de forças sobre a partícula de carga 7.4 nC (designada de partícula número 3) é



onde  $\vec{F}_{13}$  e  $\vec{F}_{23}$  são as forças eletrostáticas produzidas pelas partículas 1 e 2, de cargas 9.3 nC e 5.6 nC, respectivamente, e  $\vec{T}_{13}$ ,  $\vec{T}_{23}$  são as tensões nos fios que ligam a partícula 3 a essas duas cargas. Para que a partícula permaneça em equilíbrio é necessário que:

$$F_{13} = T_{13} \quad F_{23} = T_{23}$$

Antes de fazer as contas, é conveniente escrever o valor da constante  $k$  nas unidades usadas no problema (nC e cm):

$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} = 9 \times 10^9 \frac{10^6 \mu\text{N} \times 10^4 \text{cm}^2}{10^{18} \text{nC}^2} = 90 \frac{\mu\text{N} \cdot \text{cm}^2}{\text{nC}^2}$$

Assim, admitindo ar à volta das cargas, a tensão no fio que liga as cargas 1 e 3 é:

$$T_{13} = F_{13} = \frac{k |q_1| |q_3|}{r^2} = \frac{90 \times 7.4 \times 9.3}{1^2 + 1.5^2} \mu\text{N} = 1.9 \text{ mN}$$

(b) O valor da tensão permanece igual, pois como mostramos na alínea anterior,  $T_{13}$  não depende da força  $F_{23}$  produzida pela partícula de 5.6 nC.

## 1.5. Campo elétrico

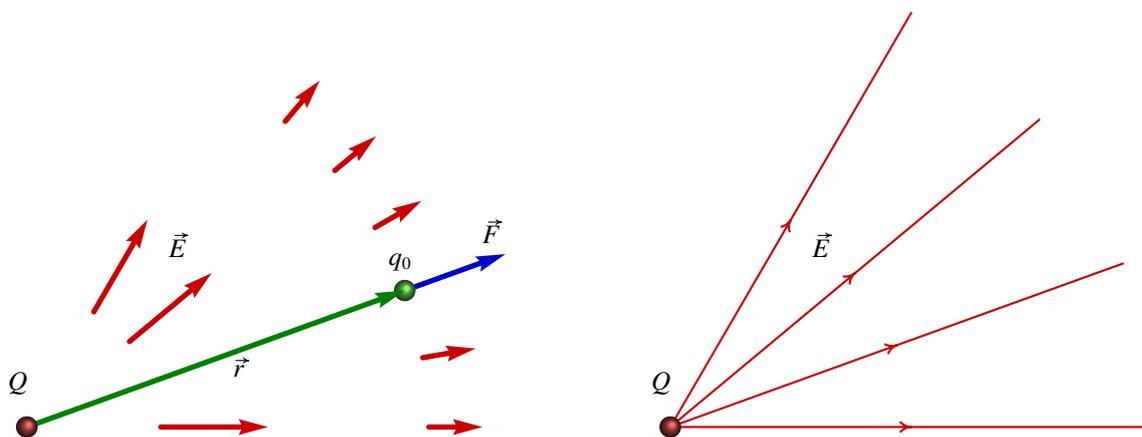
Uma forma diferente de explicar a força eletrostática entre duas partículas com carga consiste em admitir que cada carga elétrica cria à sua volta um campo de forças que atua sobre outras partículas com carga. Se colocarmos uma partícula com carga  $q_0$  num ponto onde existe um **campo elétrico**, o resultado será uma força elétrica  $\vec{F}$ ; o campo elétrico  $\vec{E}$  define-se como a força por unidade de carga:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1.4)$$

Consequentemente, o campo elétrico num ponto é um vetor que indica a direção e o sentido da força elétrica que sentiria uma carga unitária positiva colocada nesse ponto.

De forma inversa, se soubermos que num ponto existe um campo elétrico  $\vec{E}$ , podemos calcular facilmente a força elétrica que atua sobre uma partícula com carga  $q$ , colocada nesse sítio: a força será  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Precisamos apenas de conhecer o campo para calcular a força; não temos de saber quais são as cargas que deram origem a esse campo. No sistema SI, o campo elétrico tem unidades de newton sobre coulomb (N/C).

Como vimos, a força elétrica produzida por uma carga pontual positiva  $Q$  sobre uma segunda carga de prova  $q_0$  positiva é sempre uma força repulsiva, com módulo que diminui proporcionalmente ao quadrado da distância. Assim, O campo elétrico produzido por uma carga pontual positiva  $Q$  são vetores com direção e sentido a afastar-se da carga, como se mostra no lado esquerdo da figura 1.5.



**Figura 1.5.:** Campo elétrico produzido por uma carga pontual positiva  $Q$  e representação do campo usando linhas de campo.

Uma forma mais conveniente de representar esse campo vetorial consiste em desenhar alguma **linhas de campo**, como foi feito no lado direito da figura 1.5. Em cada ponto, a linha de campo que passa por esse ponto aponta na direção do campo. O módulo do campo é maior nas regiões onde as linhas de campo estão mais perto umas das outras.

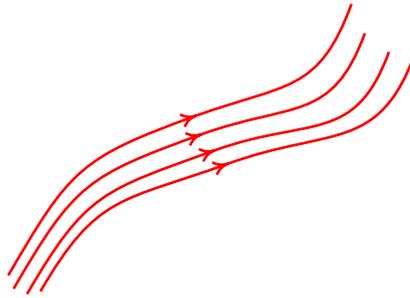
Para calcular o valor do campo elétrico produzido pela carga pontual  $Q$  num ponto, coloca-se uma carga de prova  $q_0$  nesse ponto e divide-se a força elétrica pela carga  $q_0$ . Usando a lei de Coulomb, equação 1.2, obtemos o módulo do campo elétrico produzido pela carga  $Q$ :

$$E = \frac{k|Q|}{r^2} \quad (1.5)$$

onde  $r$  é a distância desde a carga  $Q$ , que produz o campo, até o ponto onde se calcula o campo. O sinal da carga  $Q$  indicará si o campo é repulsivo ( $Q > 0$ ) ou atrativo ( $Q < 0$ ).

O campo elétrico criado por uma única carga pontual é muito fraco para ser observado. Os campos que observamos mais facilmente são criados por muitas cargas; seria preciso somar vetorialmente todos os campos de cada carga para obter o campo total. No capítulo 6 retomaremos esse assunto; por enquanto, estaremos mais preocupados em estudar os efeitos produzidos pelo campo elétrico.

As linhas de campo elétrico produzidas por um sistema de muitas cargas já não serão retas, como na figura 1.5, mas poderão ser curvas, como no exemplo da figura 1.6.



**Figura 1.6.:** Exemplo de um campo elétrico representado pelas linhas de campo.

---

### Exemplo 1.2

A força sobre uma carga de prova de 5 nC, num determinado ponto é igual a  $2 \times 10^{-4}$  N e tem a direção do eixo dos  $x$ . Calcule o campo elétrico nesse ponto. Qual seria a força sobre um elétron no mesmo ponto?

**Resolução.** A partir da força calcula-se o campo:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{2 \times 10^{-4}}{5} \vec{e}_x \left( \frac{\text{N}}{\text{nC}} \right) = 4 \times 10^4 \vec{e}_x \left( \frac{\text{N}}{\text{C}} \right)$$

A força sobre um elétron no mesmo ponto seria:

$$\vec{F} = -e\vec{E} = -1.60 \times 10^{-19} \times 4 \times 10^4 \vec{e}_x = -6.4 \times 10^{-15} \vec{e}_x \text{ (N)}$$

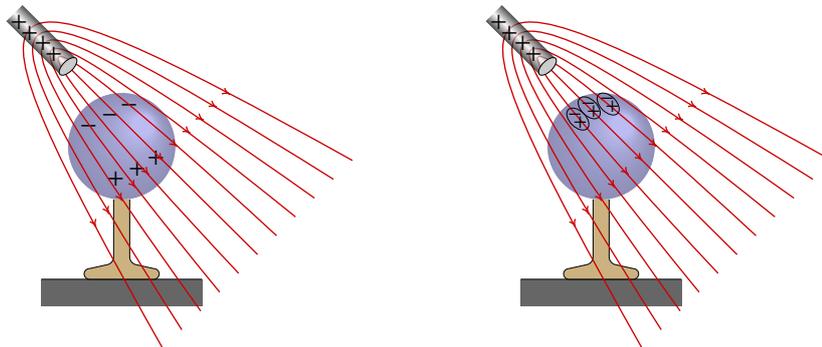

---

## 1.6. Condutores e Isoladores

Em alguns materiais, como nos metais, o elétron mais externo em cada átomo é livre de se movimentar pelo material; existe assim uma “nuvem” muito densa de elétrons (elétrons de condução), com densidade constante se o material for homogêneo. Esse tipo de material é designado de **condutor**.

Se o condutor for colocado numa região onde existe campo elétrico, como a nuvem eletrônica tem carga negativa, desloca-se em sentido oposto às linhas de campo. Assim, acumulam-se elétrons num extremo, ficando com excesso de carga negativa, e no extremo oposto aparece uma carga do mesmo valor mas com sinal positivo (falta de elétrons). Essa acumulação de cargas no condutor cria um campo interno oposto ao campo externo; quando os dois campos se anularem, o movimento da nuvem eletrônica cessará.

No lado esquerdo da figura 1.7 mostra-se o que acontece quando aproximamos uma barra, com carga positiva, a uma esfera condutora isolada. A nuvem eletrônica aproxima-se da barra. Se a barra tivesse carga negativa, a nuvem eletrônica afastava-se dela. Nos dois casos, o resultado é a indução de carga de sinal oposto perto da barra, e carga do mesmo sinal na região mais afastada da barra. A carga total da esfera continua a ser nula. Se a esfera não estivesse sobre um suporte isolador, as cargas do mesmo sinal da barra abandonavam a esfera, passando através do suporte para a terra.



**Figura 1.7.:** Efeito de uma barra com carga sobre uma esfera condutora (esquerda) e uma esfera isoladora (direita).

Nos materiais **isoladores**, os elétrons estão ligados a cada átomo. Quando uma carga externa é colocada perto do material, os elétrons e prótons de cada átomo deslocam-se na direção das linhas de campo mas em sentidos opostos, sem sair do átomo. Assim cada átomo deforma-se criando um pequeno **dipolo elétrico**; nomeadamente, um sistema com carga total nula, mas com as cargas positivas e negativas separadas por uma pequena distância.

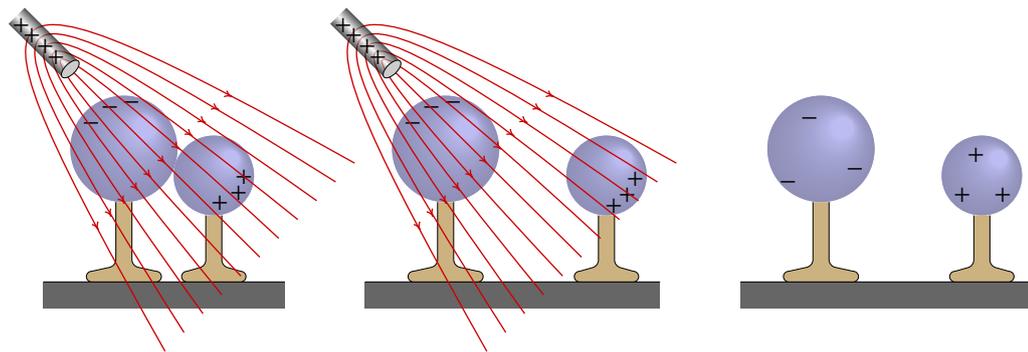
O lado direito da figura 1.7 mostra a deformação de alguns dos átomos de uma esfera isoladora, quando é aproximada uma barra com carga positiva. Independentemente do sinal da carga da barra, em cada átomo as cargas de sinal oposto à carga da barra estarão mais perto da barra e as cargas do mesmo sinal estarão mais afastadas; portanto, a força

resultante da carga externa sobre cada átomo neutro será sempre atrativa, independentemente do sinal da carga externa. Assim, um material isolador é sempre atraído por um objeto externo com carga, independentemente do sinal dessa carga.

## 1.7. Carga por indução

Um método usado para carregar dois condutores isolados, ficando com cargas idênticas mas de sinais opostos, é o método de carga por indução ilustrado na figura 1.8.

Os dois condutores isolados são colocados em contato. A seguir aproxima-se um objeto carregado, como se mostra na figura 1.8. O campo elétrico produzido pelo objeto carregado induz uma carga de sinal oposto no condutor que estiver mais próximo, e uma carga do mesmo sinal no condutor que estiver mais afastado. A seguir, separam-se os dois condutores mantendo o objeto carregado na mesma posição. Finalmente, retira-se o objeto carregado, ficando os dois condutores carregados com cargas opostas; em cada condutor as cargas distribuem-se pela superfície, devido à repulsão entre elas, mas as cargas dos dois condutores já não podem recombinar-se por não existir contato entre eles.



**Figura 1.8.:** Procedimento usado para carregar dois condutores com cargas iguais mas de sinais opostos.

Na máquina de Wimshurst, usa-se esse método para separar cargas de sinais opostos. Os condutores que entram em contato são duas pequenas lâminas metálicas diametralmente opostas sobre um disco isolador, quando passam por duas escovas metálicas ligadas a uma barra metálica (figura 1.9). As duas lâminas permanecem em contato apenas por alguns instantes, devido a que o disco roda.

Se no momento em que duas das lâminas de um disco entram em contato uma lâmina do disco oposto estiver carregada, essa carga induzirá cargas de sinais opostos nas duas lâminas que entraram em contato. Essas cargas opostas induzidas em duas regiões do disco induzem também cargas no disco oposto, porque nesse disco também há uma barra que liga temporariamente as lâminas diametralmente opostas.

Em cada disco, após induzirem cargas no disco oposto, as cargas saltam para dois coletores ligados a duas garrafas metálicas; uma das garrafas armazena carga positiva e a outra



**Figura 1.9.:** Máquina de Wimshurst.

carga negativa. Quando as cargas acumuladas nas garrafas forem elevadas produz-se uma descarga elétrica entre as pontas de duas barras ligadas às garrafas, ficando descarregadas. Essa descarga elétrica é um pequeno trovão com uma faísca bastante luminosa.

Os dois discos rodam em sentidos opostos e as duas barras que estabelecem o contato em cada disco e os dois coletores estão colocados de forma a que na rotação de cada lâmina no disco, primeiro seja induzida uma carga que a seguir induz carga oposta no disco oposto e logo passe para o coletor, ficando descarregada e pronta para iniciar outro ciclo.

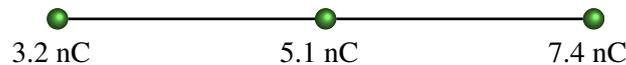
A cada ciclo as cargas induzidas aumentam, porque cada lâmina é induzida pelas cargas de várias lâminas no disco oposto. Para iniciar o processo basta com que uma das lâminas tenha acumulado alguma pequena carga por contato com outro corpo como, por exemplo, o ar à volta. A localização inicial dessa lâmina com carga determinará qual das garrafas acumula carga positiva e qual negativa.

## Perguntas

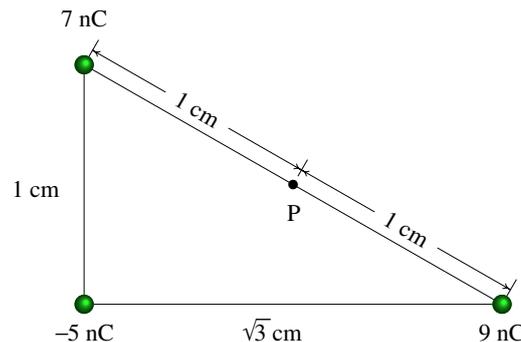
- Uma barra com carga positiva é colocada perto de uma folha de papel com carga nula. A força sobre o papel será:
  - Atrativa.
  - Repulsiva.
  - Nula.
  - Dependerá da barra ser condutora ou isoladora.
  - Atrativa se o papel estiver seco ou nula se estiver húmido.
- O que faz com que um condutor elétrico seja diferente de um isolador é:
  - Ter mais elétrons do que prótons.
  - Ter mais prótons do que elétrons.
  - Ter mais elétrons do que o isolador.
  - Ter moléculas que se deformam mais facilmente.
  - Ter alguns elétrons livres.
- Três cargas são colocadas sobre o eixo  $x$ :  
 $q_1 = -6.0 \mu\text{C}$ , em  $x = -2.0 \text{ m}$ ,  
 $q_2 = +4.0 \mu\text{C}$ , em  $x = 0$ ,  
 $q_3 = -6.0 \mu\text{C}$ , em  $x = +2.0 \text{ m}$ .  
Calcule o módulo da força sobre  $q_3$ .
  - $2.4 \times 10^{-2} \text{ N}$
  - $1.7 \times 10^{-2} \text{ N}$
  - 0
  - $2.7 \times 10^{-2} \text{ N}$
  - $3.4 \times 10^{-2} \text{ N}$
- Temos três esferas condutoras, isoladas, idênticas, uma delas com carga  $Q$  e as outras duas sem carga. Se as 3 esferas forem colocadas em contato, cada uma delas tocando as outras duas, e a seguir forem separadas:
  - Todas ficam sem carga.
  - Cada uma delas fica com carga  $Q$ .
  - Duas delas ficam com carga  $Q/2$  e outra com carga  $-Q/2$ .
  - Cada uma delas fica com carga  $Q/3$ .
  - Uma delas fica com carga  $Q$  e outra com carga  $-Q$ .
- Uma esfera metálica montada num suporte isolador liga-se à terra com um fio condutor e a seguir aproxima-se da esfera uma barra de plástico com carga positiva. A ligação da esfera a terra é retirada e a seguir afasta-se a barra de plástico. Com que carga fica a esfera metálica?
  - Nula.
  - Positiva.
  - Negativa.
  - Diferente de zero, mas não é possível saber o sinal.
  - Positiva num extremo e negativa no extremo oposto.

## Problemas

- Quando uma lâmina de acetato, eletrizada por fricção, se aproxima a 1 cm de pequenos pedaços de papel sobre uma mesa, estes ascendem colando-se ao acetato. Cada pedaço de papel é aproximadamente um quadrado com 0.5 cm de lado, cortados de uma folha de papel de  $80 \text{ g/m}^2$ . Faça uma estimativa da ordem de grandeza da carga do acetato, admitindo que uma carga idêntica e de sinal oposto é induzida em cada pedaço de papel.
- Duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  têm a carga total  $q_1 + q_2 = 10 \text{ } \mu\text{C}$ . Quando estão afastadas 3 m entre si, o módulo da força exercida por uma das cargas sobre a outra é 24 mN. Calcule  $q_1$  e  $q_2$ , se: (a) Ambas forem positivas. (b) Uma for positiva e a outra for negativa.
- Admita que, num átomo de hidrogênio, a distância entre o próton no núcleo e o elétron é de  $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ . Calcule o campo elétrico devido ao núcleo, no ponto onde está o elétron.
- O campo elétrico na atmosfera terrestre é da ordem dos  $150 \text{ N/C}$  e é dirigido para o centro da Terra. Calcule a relação entre o peso de um elétron e o módulo da força elétrica oposta exercida pelo campo elétrico da atmosfera (a massa do elétron encontra-se no apêndice B e admita que a aceleração da gravidade é  $9.8 \text{ m/s}^2$ ).
- Três cargas pontuais estão ligadas por dois fios isoladores de 2.65 cm cada um (ver figura). Calcule a tensão em cada fio.



- Entre duas placas paralelas de cargas opostas existe um campo elétrico uniforme. Um elétron libertado na superfície da placa carregada negativamente será acelerado uniformemente, a partir do repouso, em direção da placa carregada positivamente (o peso do elétron pode ser desprezado em comparação com a força elétrica e admitimos que as placas encontram-se dentro de um tubo com vácuo). Sabendo que a distância entre as placas é de 2.0 cm e que cada elétron libertado demora  $15 \text{ } \mu\text{s}$  até atingir a placa positiva, calcule: (a) o módulo do campo elétrico (a massa do elétron encontra-se no apêndice B) e (b) a velocidade com que os elétrons batem na placa positiva.
- Um sistema de três cargas pontuais está em equilíbrio (a força eletrostática sobre cada carga é zero). Sabendo que duas das cargas são  $q$  e  $2q$ , separadas por uma distância  $d$ , calcule o valor e a posição da terceira carga.
- Calcule a força elétrica resultante que atua sobre cada uma das cargas representadas na figura, e o campo elétrico produzido pelas 3 cargas no ponto P.



## 2. Potencial, corrente e força eletromotriz



Uma forma simples de sentir o efeito da corrente elétrica consiste em colocar uma colher por baixo da língua e um pedaço de folha de alumínio por cima. Quando se junta a folha de alumínio à colher, sente-se um sabor amargo na língua, produzido pela passagem de cargas elétricas através da língua. Esse fenômeno foi descoberto por Alessandro Volta, no fim do século XVIII. É importante que o metal da folha seja diferente do metal da colher; as colheres são geralmente feitas de aço ou de prata. Na nossa língua existem íons positivos e negativos; um dos metais terá uma maior tendência a atrair os íons negativos e no outro metal os íons positivos serão atraídos, criando um fluxo de cargas através dos dois metais. Volta reparou que o mesmo efeito podia ser obtido colocando dois metais diferentes, dentro de um líquido com uma solução química. Algumas combinações de metais produziam melhores resultados. Conseguiu intensificar mais o efeito colocando alternadamente vários discos de cobre e de zinco, separados por discos de papel humedecidos com água salgada; assim construiu a primeira pilha apresentada na foto acima.

Neste capítulo definiremos duas grandezas muito importantes em eletricidade, a **diferença de potencial**, ou simplesmente potencial, e a **corrente elétrica**. Para medir a diferença de potencial entre dois pontos num dispositivo, basta tocar nesses dois pontos com os dois terminais de um **voltímetro**. Se essa diferença de potencial não ultrapassar o valor máximo que aceita o voltímetro, essa será sempre uma operação segura e muito útil para diagnosticar problemas em algum dispositivo.

Para medir a corrente elétrica usa-se um **amperímetro**. Igual que no caso do voltímetro, a corrente a ser medida não deverá ultrapassar o valor máximo aceite pelo amperímetro. O problema neste caso é que um bom amperímetro deverá facilitar a passagem das cargas, para não interferir com o dispositivo onde queremos medir a corrente. Isso implica que se ligássemos o amperímetro entre dois pontos de um dispositivo, todas as cargas passarão pelo amperímetro, e não pelo dispositivo, já que encontrarão um caminho mais livre através do amperímetro. Será produzida uma corrente muito elevada que queimará o amperímetro.

Consequentemente, um amperímetro não deve ser manipulado livremente como um voltímetro. Antes de aproximarmos os terminais do amperímetro ao dispositivo, será preciso “cortar” o fluxo de carga no ponto onde vai ser medida a corrente e a seguir ligar o amperímetro entre os dois pontos onde foi feito o corte do fluxo de carga. Assim, será garantido que todas as cargas que passem pelo amperímetro tenham que passar pelo dispositivo, que foi concebido para limitar o fluxo das cargas. Um **multímetro** combina as funções de voltímetro e amperímetro num único aparelho de medição

## 2.1. Potencial eletrostático

As variáveis (vetoriais) de estado de uma partícula, são a sua posição  $\vec{r}$  e a velocidade  $\vec{v}$ ; o espaço de fase tem seis dimensões:  $(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ . Uma partícula com massa  $m$  e carga  $q$ , numa região onde exista um campo gravítico  $\vec{g}$  e um campo elétrico  $\vec{E}$  sofre uma força resultante  $m\vec{g} + q\vec{E}$ . As suas equações de movimento são:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{q}{m}\vec{E} \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \qquad (2.1)$$

em que os campos  $\vec{g}$  e  $\vec{E}$  são funções que dependem da posição  $\vec{r}$ . Essas duas equações podem ser combinadas para eliminar o tempo e obter a relação entre a posição e a velocidade:

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \left( \vec{g} + \frac{q}{m}\vec{E} \right) \cdot d\vec{r} \qquad (2.2)$$

As soluções da equação 2.2 são as trajetórias no espaço de fase,  $(\vec{r}, \vec{v})$ . Integrando os dois lados da equação, desde um ponto inicial  $(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$  até um ponto final  $(\vec{r}, \vec{v})$  no espaço de fase e multiplicando pela massa  $m$ , obtém-se:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = m \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{g} \cdot d\vec{r} + q \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \qquad (2.3)$$

A expressão no lado esquerdo é o aumento da energia cinética, e a expressão no lado direito é o trabalho realizado pelas forças gravítica e elétrica.

Na Física 1 vimos que num campo gravítico uniforme,  $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ , o integral do campo gravítico não depende do percurso de integração, mas apenas das posições inicial e final,

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} -g\vec{e}_y \cdot d\vec{r} = g(y_0 - y) \quad (2.4)$$

e a função  $U_g = mgy$  define a energia potencial gravítica. Devido a que o campo gravítico é conservativo, qualquer outro campo gravítico mais complicado também conduz a um integral de linha que não depende do percurso usado e é possível associar a cada campo gravítico uma função escalar que multiplicada pela massa dá a energia potencial.

No caso do campo elétrico a situação é análoga; os campo eletrostáticos (campos elétricos que não variam com o tempo) são sempre conservativos e, portanto, para cada campo eletrostático existe uma função escalar  $V(x, y, z)$ , que permite calcular o integral de linha do campo sem ser preciso saber o percurso de integração:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(x_0, y_0, z_0) - V(x, y, z) \quad (2.5)$$

A função  $V$  designa-se **potencial eletrostático** e a **energia potencial eletrostática** é:

$$U_e = qV \quad (2.6)$$

Em função das energias potenciais gravítica eletrostática, a equação 2.2 é a lei da conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U_e + U_g = \frac{1}{2}mv_0^2 + U_{e0} + U_{g0} \quad (2.7)$$

No sistema internacional de unidades, a unidade do potencial elétrico  $V$  é o joule sobre coulomb, unidade essa que é designada de **volt** e denota-se com a letra  $V$ :

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C} \quad (2.8)$$

Vimos no capítulo anterior que a unidade SI do campo elétrico é  $N/C$ , que pode ser escrito como  $J/(m \cdot C)$ ; consequentemente,  $N/C$  é equivalente a  $V/m$  e o campo elétrico pode ser interpretado como a diferença de potencial por unidade de comprimento.

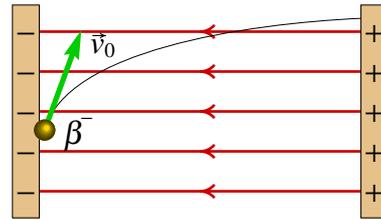
É de salientar que, devido a que a carga  $q$  pode ser positiva ou negativa, a energia eletrostática  $U_e$  de uma partícula com carga negativa será maior nos pontos onde o potencial for menor, enquanto que as partículas com carga positiva terão maior energia nos pontos onde o potencial for maior. Consequentemente, a equação 2.7 implica que, dentro de um campo elétrico, as partículas com carga positiva são aceleradas para a região com menor potencial e as partículas com carga negativa são aceleradas para a região com maior potencial.

A lei de conservação da energia mecânica só é válida para cargas que se deslocam no vácuo. As cargas que se deslocam dentro de um material condutor, como um metal, ou dentro de um isolador, como o ar, estão sujeitas a forças dissipativas que fazem diminuir rapidamente a energia mecânica, até a carga ficar em repouso.

**Exemplo 2.1**

Dentro de um tubo de vácuo há duas lâminas condutoras paralelas. Uma das lâminas é feita dum material radioativo que emite radiação beta (eletrões que saem dos núcleos). Para acelerar as partículas até à outra lâmina, liga-se uma diferença de potencial de 150 V entre as lâminas. Num dado instante é emitida uma partícula beta com velocidade inicial de módulo 300 m/s que é acelerada até a outra lâmina. (a) Calcule o módulo da velocidade com que a partícula beta bate na segunda lâmina. (b) Se a distância entre as duas lâminas for 5 cm, calcule o módulo do campo elétrico médio entre elas.

**Resolução.** Como a carga das partículas é negativa, serão aceleradas para onde o potencial for maior; assim, a diferença de potencial deve ser ligada de forma a que a lâmina radioativa tenha menor potencial. As cargas negativas também são acelerados no sentido oposto ao campo e, portanto, as linhas de campo elétrico apontam para a lâmina radioativa. Admitindo um campo constante, as linhas de campo serão paralelas entre si.



(a) O deslocamento da partícula no vácuo implica conservação da sua energia mecânica. A carga da partícula beta é a carga do eletrão,  $-1.60 \times 10^{-19}$  C, a diferença de potencial de 150 V implica uma diferença de energia potencial eletrostática:

$$\Delta U_e = 1.60 \times 10^{-19} \times 150 = 2.40 \times 10^{-17} \text{ J}$$

pode parecer pouca energia, mas é um valor muito elevado para uma eletrão que tem massa  $m = 9.11 \times 10^{-31}$  kg; para obter uma diferença de energia potencial gravítica,  $mg\Delta y$ , da ordem de  $10^{-17}$  J, seria precisa uma diferença de alturas  $\Delta y$  da ordem dos  $10^{12}$  metros! Assim, vamos ignorar a energia potencial gravítica e, portanto, o aumento da energia cinética será igual à diminuição da energia potencial eletrostática:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 2.40 \times 10^{-17}$$

substituindo os valores da massa e da velocidade inicial, obtemos o módulo da velocidade final:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \times 2.40 \times 10^{-17}}{9.11 \times 10^{-31}} + 300^2} = 7.26 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

observe o valor elevado, aproximadamente 2.4% da velocidade da luz, mas ainda não o suficiente para que a mecânica não relativista que estamos a usar deixe de ser válida. Observe também que não é preciso saber em que direção foi disparada a partícula.

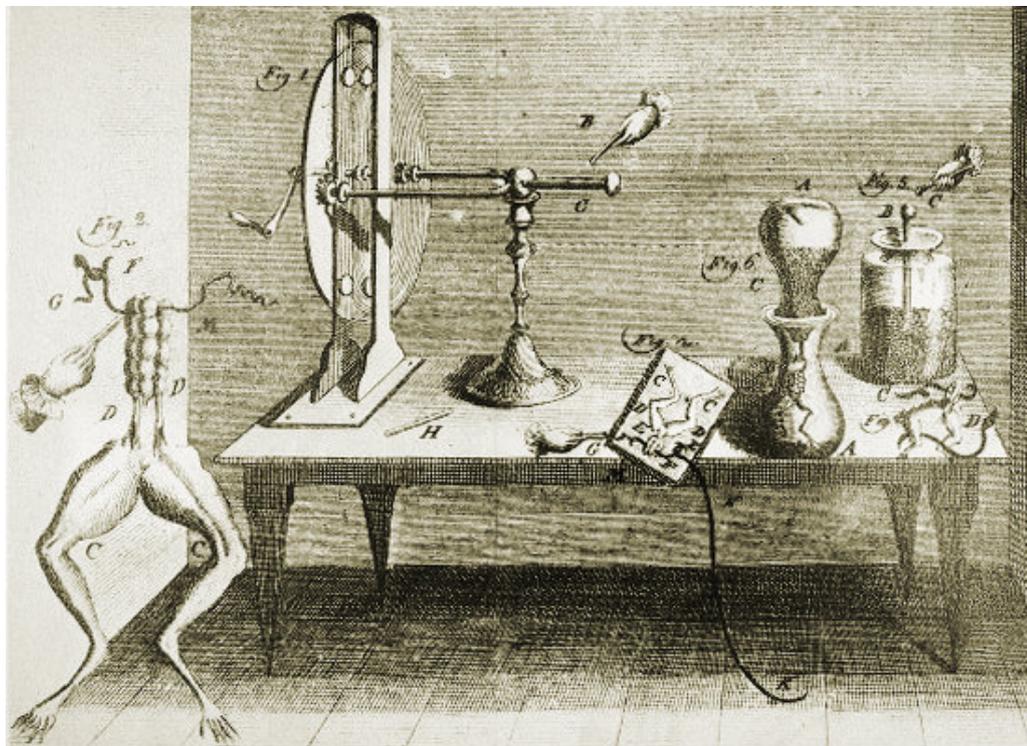
(b) O campo elétrico médio calcula-se admitindo que seja constante. Seguindo um percurso paralelo às linhas de campo, desde a lâmina da direita até à da esquerda, a equação 2.5 permite calcular o módulo do campo:

$$\int_0^{0.05} E \, ds = 150 \quad \Rightarrow \quad 0.05 E = 150 \quad \Rightarrow \quad E = 3000 \text{ V/m}$$

## 2.2. Pilhas químicas

Um dos avanços mais importantes na história da eletricidade foi a invenção das pilhas químicas, que permitem fornecer a energia necessária para manter um fluxo constante de cargas num condutor, contrariando as forças dissipativas.

O biólogo italiano Luigi Galvani (1737-1798) fez várias experiências com cargas eletrostáticas e órgãos de animais. A figura 2.1 mostra o laboratório de Galvani, com um gerador eletrostático usado para produzir descargas elétricas nas pernas de uma rã. Enquanto fazia as experiências, descobriu que quando tocava com uma faca na perna de uma rã, no instante em que era produzida uma descarga elétrica num gerador eletrostático próximo dele, a perna da rã morta encolhia-se bruscamente, como se a rã estivesse viva.



**Figura 2.1.:** Laboratório de Luigi Galvani.

Mais tarde conseguiu o mesmo efeito, sem precisar do gerador eletrostático, espetando dois fios de metais diferentes na perna da rã; quando juntava os dois fios, a perna da rã encolhia-se. Galvani atribuiu o efeito a uma eletricidade de origem animal.

O físico italiano Alessandro Volta (1745-1827) demonstrou que a origem da eletricidade observada por Galvani não eram os organismos vivos, mas que o contato entre dois metais diferentes dentro de qualquer solução química produz um fluxo de cargas elétricas (corrente), que nos seres vivos causa alguns efeitos: a contração dos músculos ou um sabor amargo quando colocamos dois fios de metais diferentes na nossa língua.



**Figura 2.2.:** Volta apresenta a sua invenção, a pilha química, a Napoleão.

Em 1800 Volta construiu a primeira pilha, colocando alternadamente discos de zinco e de cobre, separados entre si por discos de cartão molhado numa solução ácida. Repetindo a mesma sequência de discos várias vezes, conseguia produzir fluxos de carga mais elevados e sentir os seus efeitos, por exemplo, colocando as suas mãos dentro de dois recipientes com água salgada, ligados aos dois terminais da pilha; quando a pilha era formada por mais de 20 grupos de discos de cobre e zinco, o choque elétrico nas suas mãos tornava-se doloroso.

### 2.3. Força eletromotriz

Uma pilha química está composta por duas barras condutoras, designadas de **elétrodos**, embebidas dentro de uma solução química ( **eletrólito**). O eletrólito pode ser líquido ou sólido; o importante é que tenha iões positivos e negativos; por exemplo, um sal numa solução química é dissociado em iões positivos e negativos.

É necessário também que os condutores dos dois elétrodos sejam diferentes, para que um deles seja mais ativo do que o outro. Se dois metais são colocados, em contato, dentro de um eletrólito, um deles sofre corrosão esse metal que sofre corrosão diz-se que é o mais ativo dos dois. Diferentes materiais condutores podem ser ordenados numa **série galvânica**, em que os metais mais ativos aparecem no topo da lista. Por exemplo, a tabela 2.1 mostra a série galvânica quando o eletrólito usado for água do mar. A ordem na tabela galvânica pode ser diferente para diferentes eletrólitos.

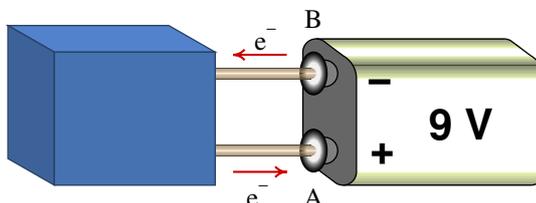
**Tabela 2.1.:** Série galvânica (em relação à água do mar). Os condutores mais ativos estão colocados no início da tabela e os menos ativos no fim.

---

Magnésio
Zinco
Alumínio
Chumbo
Ferro
Cobre
Tungstênio
Prata
Ouro
Platina
Grafite

---

A corrosão do metal mais ativo (o que aparecer primeiro na tabela 2.1) resulta da combinação dos íons negativos do eletrólito com os átomos desse metal, ficando o metal com excesso de carga negativa. Os elétrons circulam pela ligação entre os dois condutores, fora do eletrólito, passando para o eletrodo menos ativo (figura 2.3). Esses elétrons atraem os íons positivos para o metal menos ativo; a reação dos íons positivos do eletrólito com o material do eletrodo menos ativo introduz carga positiva nesse eletrodo.



**Figura 2.3.:** Numa pilha química ligada a um condutor externo, saem elétrons do eletrodo negativo e entram no eletrodo positivo.

Assim, o eletrodo que corresponder ao condutor mais ativo será o eletrodo negativo da pilha, e o condutor menos ativo será o eletrodo positivo. Por exemplo, na pilha de Volta, o eletrodo positivo é o disco de cobre e o eletrodo negativo é o disco de zinco.

O potencial elétrico é maior no eletrodo positivo do que no negativo. Se ligarmos um condutor entre os dois eletrodos da pilha, os elétrons de condução serão deslocados para o terminal positivo (maior potencial). Nesse percurso, a energia mecânica desses elétrons diminui, já que parte dessa energia é dissipada em calor, devido às colisões com os átomos do material.

Conseqüentemente, os elétrons que entram do eletrodo negativo para o condutor, têm maior energia mecânica do que os elétrons que saem do condutor e entram no eletrodo positivo. Essa diferença de energias, deverá ser igual à diferença entre as energias químicas das

reações nos dois elétrodos, que é a causa para a passagem de cargas entre o condutor e os elétrodos.

A energia necessária para a reação química de corrosão do metal no eletrodo negativo é menor que a energia necessária para a reação entre o eletrólito e o metal do eletrodo positivo. Assim, os elétrons livres do eletrodo negativo têm maior energia mecânica do que os elétrons livres do eletrodo positivo.

Designa-se por **força eletromotriz** da pilha (ou de forma abreviada, *fem*), à diferença entre a energia de um elétron no eletrodo negativo, menos a energia de um elétron no eletrodo positivo, dividida pelo valor absoluto da carga do elétron. Representaremos a fem com a letra  $\varepsilon$ . Esse valor está determinado pelas energias associadas às reações químicas entre o eletrólito e os elétrodos; quanto mais afastados estiverem na série galvânica os dois condutores usados para os elétrodos, maior será essa fem. A fem tem as mesmas unidades do potencial.

A tabela 2.2 mostra os materiais usados para os elétrodos e o eletrólito em vários tipos de pilhas produzidas industrialmente. O eletrodo da pilha onde há acumulação de cargas positivas do eletrólito é indicado com um sinal positivo (maior potencial) e o eletrodo onde há acumulação de cargas negativas (menor potencial) é indicado com um sinal negativo. O eletrodo negativo, ou **ânodo**, será o metal que tiver uma maior tendência a ser corroído pelo eletrólito, atraindo íons negativos (oxidação) e o eletrodo positivo, ou **cátodo** será o metal que atrai os íons positivos do eletrólito (redução).

**Tabela 2.2.:** Alguns tipos de pilhas usados frequentemente.

<b>Tipo</b>	<b>cátodo</b>	<b>ânodo</b>	<b>eletrólito</b>	<b>fem</b>
seca	carbono	zinco	dióxido de manganês/ cloreto de amônio	1.5 V
alcalina	carbono	dióxido de manganês	hidróxido de potássio	1.5 V
de mercúrio	óxido de mercúrio	zinco	hidróxido de sódio	1.35 V
de óxido de prata	óxido de prata	zinco	hidróxido de sódio	1.35 V
NiCd	óxido de níquel	cádmio	hidróxido de potássio	1.2 V
NiMH	óxido de níquel	liga metálica	hidróxido de potássio	1.2 V
de íons de lítio	óxido de lítio e cobalto	carbono	lítio	3.7 V

As pilhas nas três últimas linhas da tabela 2.2 são recarregáveis; isto é, as reações químicas nos elétrodos são reversíveis e se usarmos uma fonte externa para contrariar o sentido normal do fluxo das cargas, a carga total do eletrólito aumenta e os sais acumulados nos elétrodos diminui, ficando a pilha num estado semelhante ao inicial. Numa pilha que não seja recarregável, a inversão da corrente aquece a pilha com o perigo de poder explodir e sem ser recarregada.

## 2.4. Condutores e semicondutores

Vimos no capítulo anterior que num condutor sólido existe uma nuvem muito densa de elétrons de condução, que não estão ligados a nenhum átomo em particular. Por exemplo, os átomos de cobre no seu estado neutro têm 29 elétrons à volta do núcleo; 28 desses elétrons estão fortemente ligados ao átomo, enquanto que o último elétron encontra-se numa órbita mais distante do núcleo e sai com maior facilidade para a nuvem de elétrons de condução.

Um pequeno deslocamento da nuvem de elétrons de condução faz acumular um excesso de cargas negativas num extremo e cargas positivas no extremo oposto. As cargas positivas são átomos com um elétron a menos em relação ao número de prótons. Quando se liga um fio condutor aos elétrodos de uma pilha, a nuvem eletrónica é atraída pelo elétrodo positivo e repelida pelo elétrodo negativo; estabelece-se no condutor um fluxo contínuo de elétrons desde o elétrodo negativo para o positivo.

Os semicondutores são materiais semelhantes aos isoladores, sem cargas de condução, mas que podem adquirir cargas de condução passando a ser condutores, através de diversos mecanismos: aumento da temperatura, incidência de luz, presença de cargas elétricas externas ou existência de impurezas dentro do próprio material.

Atualmente os semicondutores são construídos a partir de silício ou germânio. Os átomos de silício e de germânio têm 4 elétrons de valência. Num cristal de silício ou germânio, os átomos estão colocados numa rede uniforme, como a que aparece na figura 2.4: os 4 elétrons de valência ligam cada átomo aos átomos na sua vizinhança.

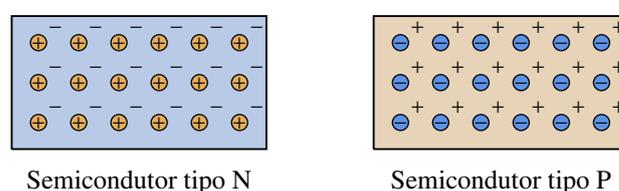


**Figura 2.4.:** Rede cristalina num cristal de silício ou de germânio.

Os átomos de arsénio têm 5 elétrons de valência. Se forem introduzidos alguns átomos de arsénio num cristal de silício, cada um desses átomos estará ligado aos átomos de silício na rede por meio de 4 dos seus elétrons de valência; o quinto elétron de valência ficará livre contribuindo para uma nuvem de elétrons de condução. Obtém-se assim um **semicondutor tipo N**, capaz de conduzir cargas de um lado para outro, através do mesmo mecanismo que nos condutores (nuvem de elétrons de condução).

Os átomos de gálio têm três elétrons de valência. Nos **semicondutores tipo P** existem alguns átomos de gálio dentro de um cristal de silício (ou germânio); os 3 elétrons de valência de cada átomo de gálio ligam-no à rede, ficando um **buraco** onde um átomo de silício tem um elétron de valência que não está ligado a outro elétron de um átomo vizinho. Esses buracos também podem ser usados para transportar corrente; os elétrons podem deslocar-se para um átomo de gálio na vizinhança, onde exista um desses buracos.

Na figura 2.5 representam-se dois blocos semicondutores dos dois tipos, N e P. Cada bloco é um cristal de silício ou de germânio; os círculos representam os átomos de arsênio e de gálio introduzidos no cristal. Esses átomos encontram-se fixos na rede, em quanto que os elétrons de condução, no semicondutor N, e os buracos no semicondutor P, podem deslocar-se entre os sítios onde existam outros átomos de arsênio ou de gálio.



**Figura 2.5.:** Os dois tipos de semicondutores.

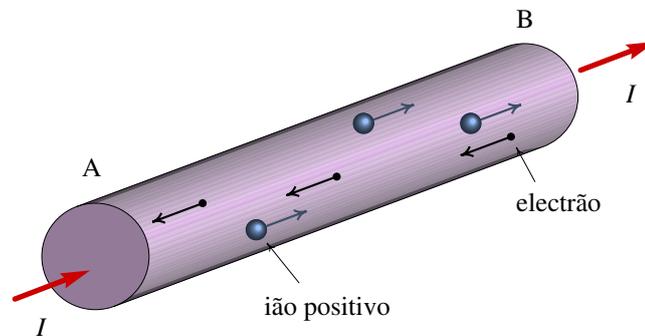
Se os extremos do um fio semicondutor do tipo P forem ligados aos eléttodos de uma pilha. Os buracos perto do eléttrodo negativo serão preenchidos com elétrons fornecidos por esse eléttrodo; esses elétrons poderão saltar para outros buracos vizinhos e assim sucessivamente. Os elétrons deslocam-se no sentido do eléttrodo negativo para o positivo, mas saltam apenas de um buraco para o vizinho. No entanto, os buracos deslocam-se todo o percurso desde o eléttrodo positivo até o negativo. É semelhante à circulação de automóveis à hora de ponta, quando há filas compactas; os automóveis conseguem apenas deslocar-se uma pequena distância no sentido da estrada, mas aparecem buracos na fila, que se deslocam rapidamente no sentido oposto.

Assim, quando ligamos um fio semicondutor entre os eléttodos da pilha, o resultado é o mesmo, independentemente do tipo de semicondutor: passagem de cargas positivas do eléttrodo positivo para o negativo, e passagem de carga negativa do eléttrodo negativo para o positivo.

Nos condutores líquidos, gasosos ou em pó existem cargas de condução tanto negativas como positivas. Já vimos por exemplo o caso do eletrólito de uma pilha, onde existem iões positivos e negativos. Num gás ionizado também existem iões positivos e negativos que se podem deslocar dentro do gás. Quando existir uma fem entre dois pontos desse tipo de condutores, os iões positivos e negativos deslocam-se em sentidos opostos. O efeito resultante, em termos de condução de cargas, produzido pelo movimento dos dois tipos de iões é o mesmo: entram cargas negativas no eléttrodo positivo e entram cargas positivas no eléttrodo negativo.

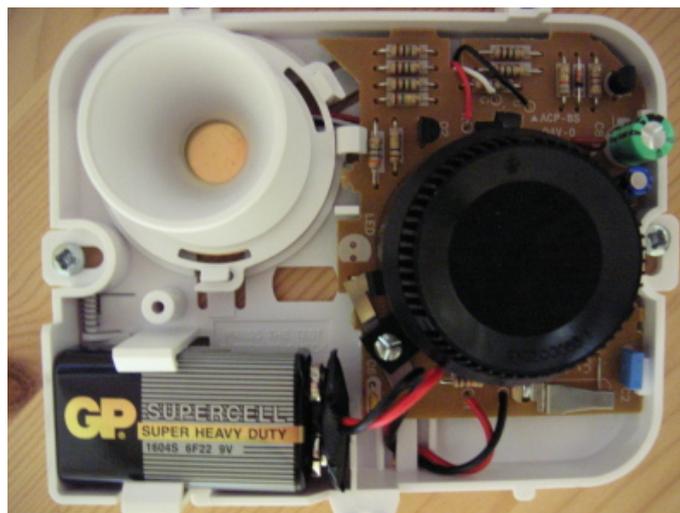
Numa lâmpada fluorescente, uma força eletromotriz é usada para ionizar o gás. A ionização do gás produz iões positivos e elétrons livres (ver figura 2.6). Se num determinado instante

o elétrodo A estiver a maior potencial que o elétrodo B, os iões positivos deslocar-se-ão de A para B, e os electrões de B para A. A passagem dessas partículas produz colisões com moléculas do gás que produzem mais iões e luz. Assim, uma vez aquecida, é precisa uma diferença de potencial menor para manter o fluxo de cargas na lâmpada.



**Figura 2.6.:** Iões positivos e electrões livres dentro de uma lâmpada fluorescente. No ponto o elétrodo A está a maior potencial que o elétrodo B.

Existem outros mecanismos de condução das cargas eléctricas, como por exemplo o que é usado nos detetores de incêndio (figura 2.7). Dentro do detetor existe uma câmara de ionização (cilindro preto na figura) onde a passagem de cargas é devida à produção de partículas alfa emitidas por uma substância radioativa. As partículas alfa são núcleos de hélio, com carga igual a duas unidades elementares de carga. As partículas são disparadas para fora da substância radioativa, passando pelo ar à volta da substância, antes de serem recolhidas num elétrodo no detetor. A presença de fumo introduz partículas sólidas no ar, que travam as partículas alfa, produzindo uma redução do número de partículas recolhidas no elétrodo. A redução do fluxo de cargas faz disparar um sinal de alarme.



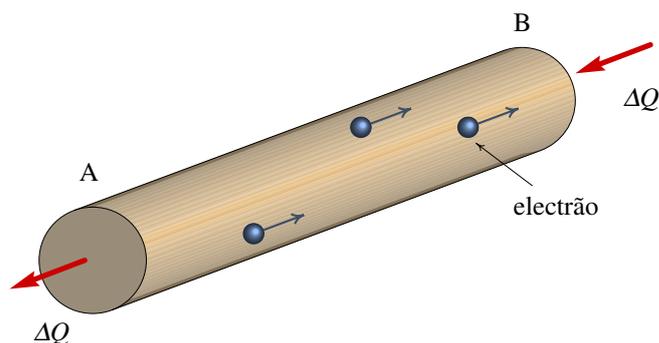
**Figura 2.7.:** Detetor de incêndios.

## 2.5. Corrente elétrica

A **corrente elétrica**, designada por  $I$ , é o fluxo das cargas de condução dentro de um material. A intensidade da corrente é a taxa de transferência da carga, igual à carga  $dQ$  transferida durante um intervalo infinitesimal  $dt$  dividida pelo tempo:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (2.9)$$

Por convenção, usa-se o sentido da transferência de cargas positivas para definir o sentido da corrente elétrica. Assim, se as cargas de condução forem elétrons, como acontece num metal, o sentido da corrente será oposto ao sentido do movimento dos elétrons. Por exemplo, o fio metálico na figura 2.8 transporta corrente elétrica de B para A. Num determinado intervalo de tempo, a carga dos elétrons transportados de A para B é  $-\Delta Q$ ; isso implica que a carga dos prótons que se combinaram com os elétrons em B foi  $\Delta Q$ , e essa é também a carga dos prótons que ficaram em A após a partida dos elétrons. Consequentemente, é equivalente considerar que houve transporte de carga  $-\Delta Q$  de A para B, ou transporte de carga  $\Delta Q$  de B para A. A corrente  $I$  é definida no sentido do transporte da carga positiva.



**Figura 2.8.:** Fio metálico a conduzir uma corrente  $I$  de B para A.

Na lâmpada fluorescente da figura 2.6, o movimento dos dois tipos de partículas faz com que a carga positiva aumente em B e diminua em A, isto é, há corrente de  $I$  A para B, no sentido indicado pelas setas na figura.

A carga total transferida durante um intervalo de tempo é o integral da corrente  $I$ , nesse intervalo:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt \quad (2.10)$$

No sistema internacional de unidades a unidade usada para medir a corrente elétrica é o ampere, designado pela letra A, que equivale à transferência de uma carga de um coulomb cada segundo:

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s} \quad (2.11)$$

## 2.6. Potencial e campo nos condutores

Consideremos um condutor cilíndrico e retilíneo com os dois extremos ligados aos terminais de uma bateria. Entre os extremos do condutor existirá uma diferença de potencial. Se A for o extremo que está ligado ao terminal negativo e B o extremo ligado ao terminal positivo, o potencial será maior em B do que em A:  $V_B > V_A$ .

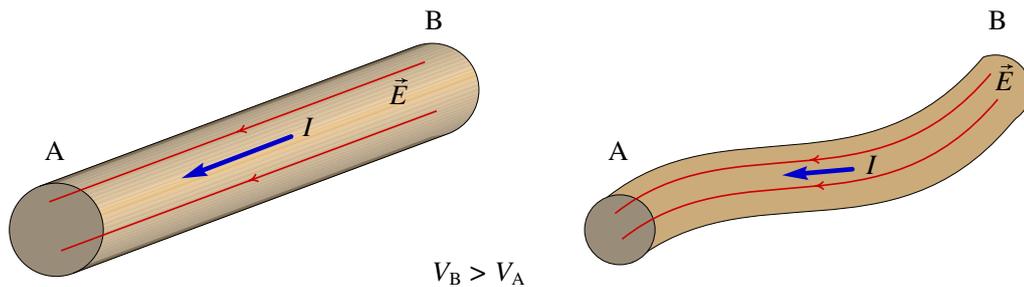
As cargas de condução no condutor deslocam-se na direção do campo elétrico; no mesmo sentido do campo, se forem cargas positivas, ou no sentido oposto se forem negativas. Assim, as linhas de campo elétrico deverão ser retas paralelas ao eixo do cilindro, como se mostra no lado esquerdo da figura 2.9. Portanto, o campo tem módulo  $E$  constante e segue a direção do deslocamento  $ds$  ao longo do condutor; o integral de linha que define a diferença de potencial, na equação 2.5, pode ser calculado facilmente:

$$\int_B^A E ds = V_B - V_A \quad \Rightarrow \quad V_B - V_A = E \Delta s \quad (2.12)$$

onde  $\Delta s$  é o comprimento do condutor. Assim, o módulo do campo no condutor é igual à diferença de potencial entre os seus extremos, dividida pelo seu comprimento:

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta s} \quad (2.13)$$

O resultado anterior também mostra que o campo aponta sempre desde o ponto com maior potencial até o ponto com menor potencial, já que para obtermos um resultado positivo, tivemos que integrar desde B até A.



**Figura 2.9.:** Corrente e campo elétrico em dois condutores diferentes, ligados à mesma diferença de potencial.

Se o condutor na figura 2.9 for um semiconductor tipo N, as cargas de condução negativas deslocam-se no sentido oposto ao campo e, portanto, a corrente é no sentido do campo. Se o semiconductor for do tipo P, as cargas de condução positivas deslocam-se no sentido do campo e a corrente também é no sentido do campo. Conseqüentemente, independentemente do tipo de condutor ou semiconductor, a corrente será sempre na direção e sentido do campo

elétrico, nomeadamente, desde o extremo com maior potencial para o extremo com menor potencial.

Se o condutor não for retilíneo, como no lado direito da figura 2.9, as linhas de campo já não são retas mas seguirão a direção do condutor. Isso implica que o campo vetorial  $\vec{E}$  não é constante, mas se o condutor for homogéneo, a separação entre as linhas será sempre igual, indicando que o módulo  $E$  do campo é constante. Nessas condições, o integral de linha do campo pode ainda ser calculado como foi feito na equação 2.12 e o resultado 2.13 também é válido.

Assim, quanto mais comprido for o fio condutor que liga os pontos A e B, com potenciais fixos  $V_A$  e  $V_B$ , menor será o campo elétrico. A intensidade da corrente depende do módulo do campo elétrico e da área da seção transversal do fio; quanto maior for o módulo do campo, mais rápido será o movimento da nuvem de cargas de condução e maior será a corrente; quanto maior for a área da seção transversal, mais grosso será o fio e o movimento da nuvem de cargas de condução produzirá uma corrente maior. Na figura 2.9, a corrente é maior no condutor do lado esquerdo porque o comprimento é menor e a área da seção transversal é maior. No próximo capítulo estudaremos com mais pormenor essa relação.

## 2.7. Potência elétrica

O transporte de cargas de condução num condutor implica dissipação, geralmente na forma de calor, fenómeno esse designado de **efeito Joule**. Mas existem outros mecanismos de dissipação de energia mecânica em que essa energia é transformada em outros tipos de energia. Por exemplo, no caso de uma lâmpada parte da energia mecânica é dissipada em calor e outra parte é transformada em luz.

Consequentemente, se num condutor circula uma corrente desde um extremo A até outro extremo B, a energia mecânica das cargas de condução deverá ser menor em B do que em A e a diferença de potencial no condutor será  $\Delta V = V_B - V_A$  (o potencial deverá ser maior em B do que em A).

Se a corrente for **estacionária** (igual em todas as partes do condutor), a energia cinética das cargas de condução, por unidade de volume, permanece constante ao longo do condutor, e a diminuição da energia mecânica é devida unicamente à diminuição da energia potencial eletrostática  $U_e$ . De acordo com a equação 2.6, por cada quantidade infinitesimal de carga  $dQ$  que for transferida no condutor, a energia elétrica dissipada será:

$$dU_e = \Delta V dQ \quad (2.14)$$

A potência dissipada em cada instante obtém-se dividindo  $dU_e$  pelo intervalo de tempo  $dt$  que demorou o transporte da carga  $dQ$ ; portanto, obtemos o seguinte resultado para a potência instantânea dissipada:

$$\boxed{P = \Delta V I} \quad (2.15)$$

Usando as definições do volt e do ampere, podemos conferir que o produto dessas duas unidades é de facto o watt (W), que é a unidade SI de potência.

Para manter a corrente no condutor, será preciso que a mesma potência  $P$  dissipada no condutor seja fornecida pela bateria que está a estabelecer a diferença de potencial  $\Delta V$ . Assim, a potência fornecida pela bateria é também  $\Delta V I$ , em que  $\Delta V$  é a diferença de potencial entre os terminais da bateria. Numa bateria “ideal” essa diferença de potencial é constante e igual ao valor da fem,  $\varepsilon$ ; a potência fornecida por uma bateria ideal é:

$$P = \varepsilon I \quad (2.16)$$

Como veremos no próximo capítulo, numa bateria real  $\Delta V$  diminui em função da corrente.

### Exemplo 2.2

Num condutor ligado a uma pilha ideal com fem de 1.5 V, circulam  $10^{16}$  elétrons de condução durante 2 segundos. Calcule: (a) A corrente média. (b) A energia fornecida pela pilha durante esse intervalo. (c) A potência média fornecida pela pilha. (d) Se a carga inicial da pilha for 3 A·h e se fosse possível manter a mesma corrente média até a pilha descarregar totalmente, quanto tempo demorava a pilha a descarregar?

**Resolução.** (a) A carga transferida é o valor absoluto da carga dos  $10^{16}$  elétrons:

$$\Delta Q = 10^{16} \times 1.60 \times 10^{-19} = 1.60 \times 10^{-3} \text{ C}$$

e a corrente média é:

$$\bar{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1.60 \times 10^{-3}}{2} = 0.8 \text{ mA}$$

(b) A energia fornecida pela pilha é igual à energia elétrica dissipada no condutor:

$$\Delta U_e = \Delta V \Delta Q = 1.5 \times 1.60 \times 10^{-3} = 2.4 \text{ mJ}$$

(c) A potência média fornecida é igual a essa energia, dividida pelo intervalo de tempo:

$$P_m = \frac{\Delta U_e}{\Delta t} = \frac{2.4 \times 10^{-3}}{2} = 1.2 \text{ mW}$$

(d) A carga que a pilha perde cada segundo é metade da carga calculada na alínea a:  $\Delta Q = 0.8 \times 10^{-3} \text{ C}$ . Como um coulomb é igual a 1 A·s, passando para unidades de ampere-hora (A·h) é:

$$\Delta Q = \frac{0.8 \times 10^{-3}}{3600} \text{ A} \cdot \text{h} = 2.22 \times 10^{-7} \text{ A} \cdot \text{h}$$

e o tempo total que era possível manter a mesma corrente média era:

$$\Delta t = \frac{3}{2.22 \times 10^{-7}} = 1.35 \times 10^7 \text{ s} \approx 156 \text{ dias}$$

## Perguntas

1. A força eletromotriz de uma pilha química:
  - A. É independente das reações químicas no seu interior.
  - B. Depende do tamanho da pilha.
  - C. Depende da sua carga máxima.
  - D. É independente do tamanho dos elétrodos.
  - E. Nenhuma das outras respostas.
2. Se o custo da energia elétrica fosse de 10 centavos por kilowatt-hora, quanto custaria manter uma torradeira de 660 W a funcionar durante meia hora?
  - A. 15 centavos.
  - B. 12 centavos.
  - C. 6.9 centavos.
  - D. 3.3 centavos.
  - E. 1.7 centavos.
3. A corrente num condutor aumenta linearmente desde um valor inicial de 3 A, em  $t = 0$ , até o valor final 6 A, em  $t = 3$  h. A carga total transportada pelo condutor durante esse período é:
  - A. 48.6 kC
  - B. 32.4 kC
  - C. 64.8 kC
  - D. 97.2 kC
  - E. 16.2 kC
4. Uma pilha AA tem uma carga total de 8 A·h. Se for ligada a uma resistência produzindo uma corrente média de 50 mA durante 50 horas, com que percentagem da sua carga ficará após as 50 horas?
  - A. 31 %
  - B. 50 %
  - C. 21 %
  - D. 69 %
  - E. 131 %
5. Se cada segundo  $4.0 \times 10^{18}$  elétrons e  $1.5 \times 10^{18}$  prótons atravessam a seção transversal de um tubo de descarga de hidrogénio, a corrente média no tubo é:
  - A. 0.40 A
  - B. 0.56 A
  - C. 0.88 A
  - D. 1.5 A
  - E. 4.0 A

## Problemas

1. Um elétron é acelerado no vácuo, a partir do repouso, através de uma diferença de potencial de 220 V. Calcule a velocidade final do elétron (a massa do elétron encontra-se no apêndice B).
2. Num tubo de raios X os elétrons são acelerados por meio de um campo elétrico. Os elétrons são libertados do repouso, deslocam-se no vácuo através de uma região onde existe uma diferença de potencial de 4 kV, e chocam com um alvo emitindo radiação X. (a) Calcule a energia cinética e a velocidade com que chocam os elétrons no alvo. (b) Se a variação de potencial se estender por uma distância de 8 dm, calcule o campo elétrico médio.
3. Uma bateria de automóvel tem uma carga máxima de 250 Ah, que corresponde à carga disponível quando a bateria está carregada a 100%. (a) Depois de algum uso, a bateria descarrega-se até 60%. Qual é a carga, em coulombs, com que fica a bateria? (b) Para recarregá-la, a bateria foi ligada a um carregador de 12 V. Inicialmente a corrente no carregador foi 7 A, e ao fim de 6 horas diminuiu até 3 A. Admitindo que a corrente diminuiu linearmente, com que percentagem da sua carga máxima fica a bateria no fim das 6 horas?
4. Uma calculadora pode funcionar com um adaptador que fornece 40 mA, a 3 V, ou com duas pilhas AA cada uma com 1.5 V e carga máxima de 8 Ah. Admitindo que a calculadora utiliza a mesma potência quando funciona a pilhas ou com o adaptador, por quanto tempo poderá funcionar antes de ser preciso mudar as pilhas?
5. Numa casa, o fusível do fogão elétrico na caixa de fusíveis é de 30 A. Qual é a potência máxima que pode ter o fogão? (admita diferença de potencial de 230 V).
6. Uma pilha recarregável, de Ni-MH, tem uma diferença de potencial de 1.2 V, e uma carga máxima de 2300 mA·h. Calcule a energia máxima que pode armazenar a pilha.



7. A corrente num cabo varia de acordo com a função  $I = 20 + 3t^2$ , onde  $I$  mede-se em amperes e  $t$  em segundos. (a) Que carga transporta o cabo desde  $t = 0$  até  $t = 10$  s? (b) Qual é o valor da corrente constante que transporta a mesma quantidade de carga no mesmo intervalo de tempo?

- 
8. Num condutor ligado a uma pilha com fem de 1.5 V, circulam  $10^{16}$  elétrons de condução durante 2 segundos. Calcule:
- (a) A intensidade da corrente média.
  - (b) A energia fornecida pela fem durante esse intervalo.
  - (c) A potência média fornecida pela fem.
  - (d) Se a carga inicial da pilha era de 3 A·h, com que carga fica após os 2 segundos?
9. Para manter uma temperatura de 20 graus num quarto, durante um dia de inverno, foi estimado que será precisa uma energia de 132 kJ cada minuto. Para fornecer essa energia será usado um aquecedor elétrico, ligado à tensão de 220 V disponível na casa.
- (a) Calcule a intensidade da corrente que deverá circular pelo aquecedor.
  - (b) Se o custo da energia elétrica for de 12 centavos por kw·h, calcule o custo de manter ligado o aquecedor durante 10 minutos.

### 3. Resistência elétrica



"Falando de uma maneira geral, os efeitos da corrente no corpo humano são os seguintes:

- com menos do que 0.01 A: sensação de formigueiro ou nada se sente;
- 0.02 A: sensação de dor e fica-se agarrado;
- 0.03 A: perturbações respiratórias;
- 0.07 A: grandes dificuldades respiratórias;
- 0.1 A: morte devido a fibrilação;
- mais do que 0.2 A; não existe fibrilação mas verificam-se queimaduras muito graves e cessa a respiração.

A gama intermédia que vai de 0.1 a 0.2 A é, por estranho que pareça, a que origina a maior parte das mortes nas situações comuns, porque a este nível de intensidade inicia-se a fibrilação do coração, que consiste numa contração muscular espasmódica e incontrolada do coração. A quebra da corrente sanguínea daí resultante origina rapidamente a morte. Acima de 0.2 A o coração simplesmente pára, e as medidas normais de primeiros socorros podem restabelecer o seu funcionamento. Mas o único processo para deter a fibrilação é um outro choque elétrico controlado. Por isso, correntes entre 0.1 e 0.2 A são mais mortais do que correntes mais intensas. A intensidade que passa por uma vítima é geralmente determinada pela resistência da pele que vai de cerca de 1000  $\Omega$  para peles molhadas até 500 000  $\Omega$  para peles secas. A resistência interna é menor do que a da pele, estando compreendida entre 100 e 500  $\Omega$ . Para voltagens superiores a cerca de 240 V, geralmente resulta a perfuração da pele pela corrente."

Jearl Walker, *O Grande Circo da Física* Walker (1975).

### 3.1. Caraterísticas tensão-corrente

A potência elétrica que dissipa um elemento de um circuito, por exemplo, uma lâmpada, é igual ao produto da diferença de potencial e a corrente no elemento:  $P = I\Delta V$ . Duas lâmpadas diferentes podem ter diferentes valores da potência, com o mesmo valor da voltagem. Por exemplo, existem lâmpadas pequenas de 12 V com potências de 1 W e de 2 W; isso indica que para o mesmo valor da diferença de potencial, a corrente na lâmpada de 2 W é o dobro do que a corrente na lâmpada de 1 W.

Cada elemento de circuito tem uma curva caraterística que mostra os valores resultantes da corrente,  $I$ , para diferentes valores da diferença de potencial,  $\Delta V$ . A figura 3.1 mostra algumas dessas curvas caraterísticas, para três elementos de circuito diferentes.

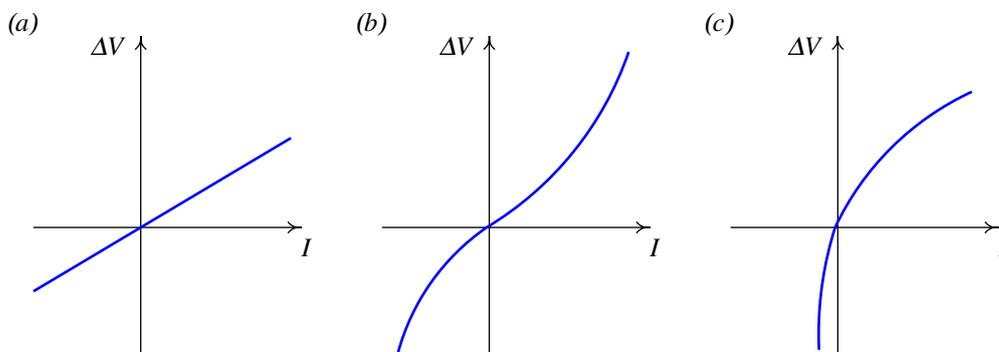


Figura 3.1.: Caraterísticas tensão-corrente de três dispositivos diferentes.

### 3.2. Lei de Ohm

Em alguns condutores (o caso *a* na figura 3.1), designados de **ohmicos**, a curva caraterística é uma reta que passa pela origem. Essa relação linear entre  $I$  e  $\Delta V$  expressa-se matematicamente com a **Lei de Ohm**:

$$\Delta V = RI \quad (3.1)$$

Onde  $R$  é uma constante chamada **resistência**, que corresponde ao declíve da caraterística tensão-corrente. Um condutor ohmico designa-se simplesmente de **resistência**. A figura 3.2 mostra o diagrama usado para representar nos circuitos uma resistência.



Figura 3.2.: Diagrama de circuito para uma resistência.

Nos materiais não ohmicos (*b* e *c* na figura 3.1) o declíve não é constante, o que indica que a resistência é diferente para diferentes valores da diferença de potencial.

No sistema internacional de unidades, a unidade usada para medir a resistência é o ohm, designado pela letra grega omega maiúscula,  $\Omega$ . Uma resistência de 1 ohm é uma resistência em que uma voltagem de 1 volt produz uma corrente de 1 ampere:

$$1 \Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}} \quad (3.2)$$

Usando a lei de Ohm, a potência dissipada por efeito Joule numa resistência ( $P = I\Delta V$ ) pode ser escrita em função do valor da resistência:

$$P = RI^2 = \frac{\Delta V^2}{R} \quad (3.3)$$

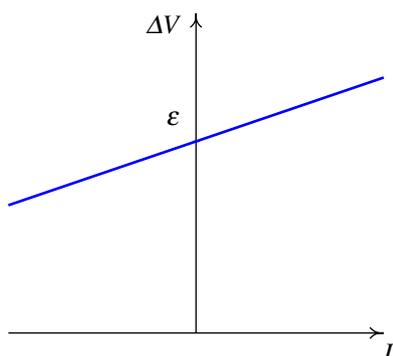
assim, a especificação da potência de um dispositivo elétrico tem implícito um valor da diferença de potencial (tensão) que deverá ser usado para o seu correto funcionamento. Quanto maior for essa potencia nominal, menor será a resistência do dispositivo.



**Figura 3.3.:** A resistência de cada eletrodoméstico é igual ao quadrado da diferença de potencial à qual deverá ser ligado, dividido pela sua potência nominal.

### 3.3. Caraterística de uma bateria

Uma pilha ou bateria fornece energia eletrostática, devido às reações químicas entre os elétrodos e o eletrólito, mas também dissipa alguma energia em calor, devido à passagem de cargas pelos elétrodos e pelo eletrólito. Assim, a caraterística da bateria é a soma da função constante  $\Delta V = \varepsilon$  mais a caraterística de uma resistência  $r$  (figura 3.4).



**Figura 3.4.:** Característica tensão-corrente de uma bateria.

A ordenada na origem é o valor da fem, e o declive é a **resistência interna** da pilha. Assim, o diagrama de circuito correspondente deverá incluir uma fem ligada em série com uma resistência (ver figura 3.5). A barra mais fina e mais comprida, na representação gráfica da fem, representa o elétrodo positivo, e a barra mais curta e grossa o elétrodo negativo.



**Figura 3.5.:** Circuito equivalente para uma bateria.

No lado em que  $I$  é negativa no gráfico 3.4, quer dizer que a corrente entra na bateria pelo elétrodo negativo e sai pelo elétrodo positivo. Esse é o modo normal de funcionamento das baterias; nessas condições a bateria funciona como **gerador**, as cargas de condução ganham energia potencial na passagem pela bateria. A bateria fornece potência elétrica; parte dessa potência fornecida pelas reações químicas é dissipada em calor dentro da própria bateria.

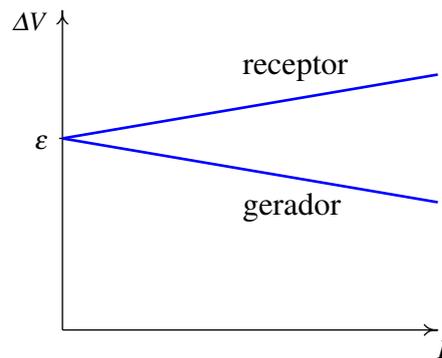
No lado em que  $I$  é positiva no gráfico 3.4, a corrente entra na bateria pelo elétrodo positivo e sai pelo elétrodo negativo. As cargas perdem energia potencial durante a sua passagem pela bateria. Assim, deverá existir outra bateria externa que fornece energia às cargas de condução e que mantém a diferença de potencial entre os elétrodos por cima do valor da fem. Diz-se que a bateria está a funcionar como **receptor**.

É costume representar a corrente na bateria em valor absoluto. Assim, os dois modos de funcionamento da bateria aparecerão no mesmo quadrante da característica tensão-corrente (figura 3.6). Nos dois ramos, o valor absoluto do declive é igual à resistência interna  $r$ .

Na figura 3.7 mostram-se os dois modos de funcionamento usando o diagrama de circuito da bateria. No modo de gerador, a diferença de potencial entre os elétrodos é:

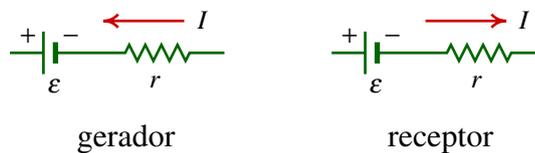
$$\boxed{\Delta V_{\text{gerador}} = \varepsilon - rI} \quad (3.4)$$

o sentido da corrente implica que as cargas de condução ganham energia na passagem pela fem, mas dissipam alguma dessa energia na resistência interna. A potência total fornecida



**Figura 3.6.:** Os dois ramos da característica tensão-corrente de uma bateria.

pela bateria é a potência fornecida pela fem ( $I\varepsilon$ ), menos a potência dissipada na resistência interna ( $I^2r$ ).



**Figura 3.7.:** Sentido da corrente numa bateria, nos dois modos de operação.

No modo de receptor, a diferença de potencial entre os elétrodos é:

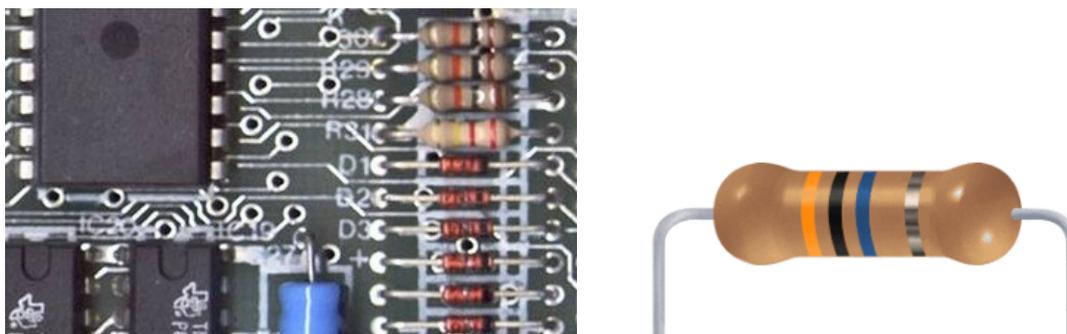
$$\Delta V_{\text{receptor}} = \varepsilon + rI \quad (3.5)$$

neste caso, as cargas de condução perdem energia na fem e na resistência interna. A potência total dissipada na bateria será a soma da potência dissipada na fem ( $I\varepsilon$ ), mais a potência dissipada na resistência interna ( $I^2r$ ). A parte da potência dissipada devida à fem, poderá ser usada para inverter as reações químicas entre os elétrodos e o eletrólito, se a bateria for recarregável; caso contrário, essa potência também é dissipada em calor.

### 3.4. Código de cores

As resistências usadas com frequência nos circuitos eletrônicos são pequenos cilindros de carbono, com um isolamento cerâmico.

Usam-se 4 riscas de cores para indicar o valor da resistência (figura 3.8). Três das riscas estão mais juntas; as duas primeiras dessas riscas (a primeira é a que estiver mais perto de um extremo) combinam-se para produzir um número com dois algarismos; cada cor corresponde a um algarismo (ver tabela 3.1). A terceira risca indica a ordem de grandeza desse número, em ohms, usando a mesma relação entre cores e algarismos usada nas duas primeiras riscas. A quarta risca diz qual é a tolerância (erro relativo) desse valor; os valores correspondentes a cada cor aparecem na tabela 3.1.



**Figura 3.8.:** Circuito impresso (PCB) incluindo algumas resistências e imagem ampliada de uma resistência.

**Tabela 3.1.:** Código de cores usado para as resistências.

Cor	Algarismo	Tolerância
Preto	0	
Castanho	1	1%
Vermelho	2	2%
Laranja	3	
Amarelo	4	
Verde	5	0.5%
Azul	6	0.25%
Roxo	7	0.1%
Cinza	8	0.05%
Branco	9	
Dourado		5%
Prateado		10%
Nenhum		20%

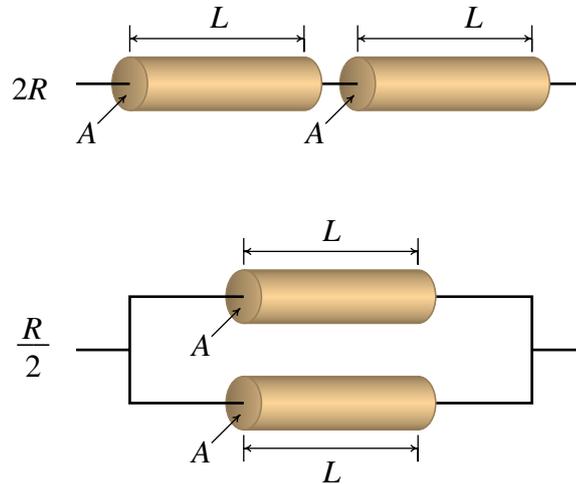
Por exemplo, no caso apresentado na figura 3.8, as riscas são laranja, preta, azul e prateada, que conduzem ao valor:  $30 \times 10^6 \Omega$  ( $\pm 3 \times 10^6 \Omega$ ).

### 3.5. Resistividade

A resistência de um condutor ohmico é devida às colisões entre as cargas de condução e os átomos ou iões. As cargas de condução são aceleradas pela força eletrostática, mas devido às colisões acabam por atingir uma velocidade média constante. A resistência é determinada pela relação que existir entre a velocidade média atingida e a diferença de potencial (por unidade de comprimento) que produz o movimento. Os fatores que determinam o valor da resistência são: a natureza do material, o tamanho do condutor e a

temperatura.

Para estudar a influência do tamanho do condutor, consideremos dois cilindros idênticos, de comprimento  $L$  e área transversal  $A$ , cada um com resistência  $R$ , ligados em série ou em paralelo (figura 3.9).



**Figura 3.9.:** Dois cilindros metálicos ligados em série e em paralelo.

No primeiro caso, é como se tivéssemos um único cilindro de comprimento  $2L$ , se a corrente for  $I$ , a diferença de potencial será  $RI + RI$ , nomeadamente, a resistência do sistema é  $2R$ . Assim, duplicando o comprimento duplica-se a resistência: a resistência é diretamente proporcional ao comprimento do condutor.

No segundo caso, é como se tivéssemos um único condutor de comprimento  $L$  e área transversal  $2A$ . Nesse caso, se a diferença de potencial em cada um dos cilindros for  $\Delta V$ , a corrente em cada cilindro será  $\Delta V/R$  e a corrente total será  $2\Delta V/R$ , que corresponde à corrente num sistema com resistência  $R/2$ . Assim, duplicando a área transversal, a resistência diminui a metade: a resistência é inversamente proporcional à área da seção transversal.

Assim, a resistência de um condutor com comprimento  $L$  e área transversal  $A$  é:

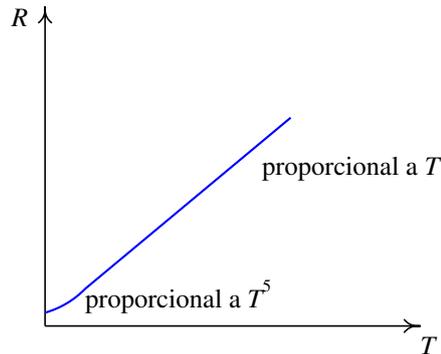
$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (3.6)$$

onde a constante de proporcionalidade,  $\rho$ , é a **resistividade** do material, que dependerá da temperatura, e da natureza do material.

Nos condutores ohmicos, a resistência aumenta com a temperatura, em forma quase linear (figura 3.10), quando a temperatura não estiver perto do zero absoluto ( $-273^\circ\text{C}$ )

A expressão empírica para a resistência de um condutor em função da temperatura é:

$$R = R_{20}(1 + \alpha_{20}(T - 20)) \quad (3.7)$$



**Figura 3.10.:** Variação da resistência de um condutor em função da temperatura.

onde  $R_{20}$  é a resistência a  $20^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_{20}$  é o **coeficiente de temperatura** e  $T$  é a temperatura em graus centígrados. O coeficiente de temperatura é o mesmo para todos os condutores feitos do mesmo material; cada material tem um coeficiente de temperatura próprio que é medido experimentalmente. Observe que o declive da reta na figura 3.10 é o produto  $R_{20} \alpha_{20}$ ; conseqüentemente, a pesar de o declive ser quase constante, o valor da constante  $\alpha$  depende da temperatura. A tabela 3.2 mostra os valores da resistividade e do coeficiente de temperatura de alguns materiais a  $20^\circ\text{C}$ . O grafite, que é um semicondutor, tem um coeficiente de temperatura negativo, o que quer dizer que a  $20^\circ\text{C}$  a sua resistência diminui quando a temperatura aumenta.

**Tabela 3.2.:** Resistividade e coeficiente de temperatura de alguns materiais, a  $20^\circ\text{C}$ .

Material	$\rho_{20}$ (n $\Omega$ ·m)	$\alpha_{20}$ ( $^\circ\text{C}^{-1}$ )
Prata	16	0.0038
Cobre	17	0.0039
Alumínio	28	0.0039
Tungstênio	55	0.0045
Ferro	100	0.0050
Chumbo	220	0.0043
Níquel-crômio	1000	0.0004
Grafite	35000	-0.0005

### Exemplo 3.1

Um fio de cobre de raio 0.0815 cm e comprimento de 40 cm transporta uma corrente de 1 A. Calcule o campo elétrico dentro do fio e a diferença de potencial nos extremos, quando a temperatura for de  $30^\circ\text{C}$ .

**Resolução.** Usando o valor de  $\rho_{20}$  para o cobre (tabela 3.2), a resistência a  $20^\circ\text{C}$  é:

$$R_{20} = \frac{\rho_{20} L}{A} = \frac{1.7 \times 10^{-9} \times 0.4}{\pi (0.000815)^2} = 3.259 \text{ m}\Omega$$

e usando o valor de  $\alpha_{20}$  do cobre e a equação 3.7, obtemos:

$$R(30^\circ\text{C}) = 3.259 (1 + 0.0039 \times (30 - 20)) = 3.386 \text{ m}\Omega$$

A diferença de potencial obtém-se a partir da lei de Ohm:

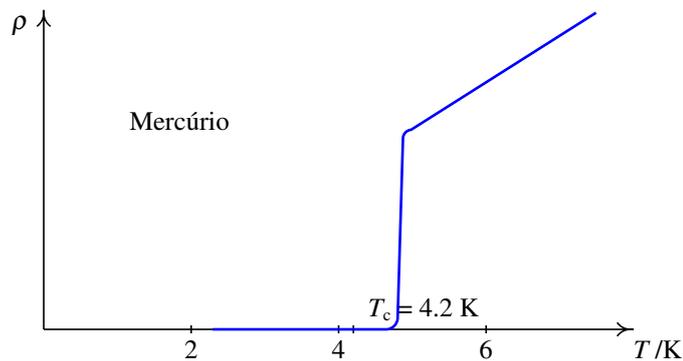
$$\Delta V = IR = 3.386 \text{ mV}$$

Como a seção transversal do fio é constante, o módulo do campo elétrico também deve ser constante e, portanto, pode ser calculado assim:

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta s} = \frac{3.386}{0.4} = 8.465 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$$

### 3.6. Supercondutividade

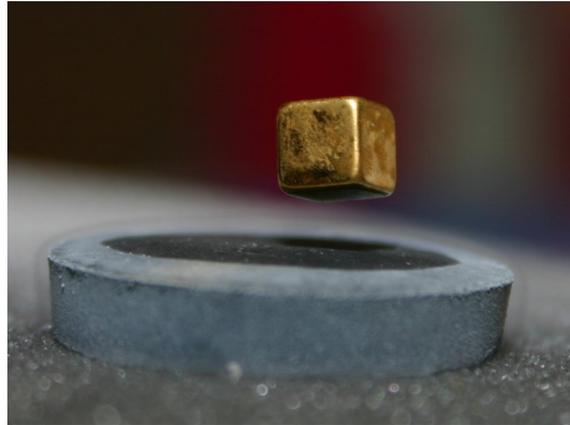
Em 1911, o físico holandês Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926) descobriu que a resistividade de alguns condutores diminui drasticamente quando a temperatura se aproxima do zero absoluto ( $-273^\circ\text{C}$ ). O gráfico da figura 3.11 mostra os valores medidos por Onnes para a resistividade do mercúrio, perto dos 4 kelvin ( $-269^\circ\text{C}$ )



**Figura 3.11.:** Resistividade do mercúrio, a baixas temperaturas.

Por baixo da **temperatura crítica** (4.2 K no caso do mercúrio) a resistividade nos supercondutores diminui num fator de aproximadamente  $10^{12}$ , tornando-se praticamente nula. Isso implica a possibilidade de manter uma corrente a circular no supercondutor, durante alguns anos, sem existirem fontes de força eletromotriz!

Nas experiências de **levitação magnética** coloca-se um ímã sobre um material supercondutor (figura 3.12). O ímã induz no supercondutor correntes elétricas que produzem um campo magnético oposto ao campo do ímã; em condições normais, essas correntes desaparecem rapidamente devido a efeitos dissipativos no supercondutor. No entanto, se o sistema é arrefecido até a temperatura ser menor que a temperatura crítica do supercondutor, as correntes persistem e o disco eleva-se no ar devido à repulsão magnética (efeito Meissner).



**Figura 3.12.:** Levitação magnética de um ímã cúbico sobre um disco de material supercondutor.

Essas experiências têm a dificuldade de não ser fácil atingir temperaturas tão baixas e mantê-las durante algum tempo. Mas hoje em dia já foram descobertos materiais com temperaturas críticas muito mais elevadas, embora ainda na ordem dos  $-150^{\circ}\text{C}$ .

O princípio da levitação magnética já está a ser aplicado comercialmente nos comboios **maglev** em Xangai e Japão (figura 3.13). O comboio possui barras supercondutoras em vez de rodas, e os carris são substituídos por uma calha onde vários eletro-ímãs produzem campos magnéticos no momento em que o comboio passa perto deles. A levitação magnética reduz drasticamente o atrito entre o comboio e a calha, sendo preciso uma força propulsora muito menor; esse tipo de comboios podem alcançar velocidades superiores a 500 km/h. A força propulsora é produzida alternando os campos magnéticos dos eletro-ímãs na calha, o qual produz, para além da força vertical que contraria o peso, uma força que faz acelerar ou travar o comboio.



**Figura 3.13.:** O comboio Maglev de Xangai.

### 3.7. Associações de resistências

A característica tensão-corrente de um sistema de várias resistências tem sempre o mesmo aspecto que a característica de uma única resistência; nomeadamente, é uma reta que passa pela origem. O declive dessa reta é a resistência equivalente. Podemos usar algumas regras simples para calcular a resistência equivalente, quando as resistências estiverem ligadas em série ou em paralelo.

Dois resistências estarão ligadas em série, quando uma estiver a seguir à outra, sem nenhum outro elemento de circuito no meio, como se mostra na figura 3.14.



**Figura 3.14.:** Duas resistências ligadas em série.

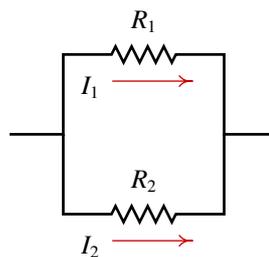
Num sistema de duas resistências ligadas em série, a corrente é a mesma nas duas resistências. A diferença de potencial no sistema é a soma das diferenças de potencial em cada resistência:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = (R_1 + R_2)I \quad (3.8)$$

Assim, o sistema é equivalente a uma única resistência  $R_s$  com valor igual à soma das duas resistências.

$$\boxed{R_s = R_1 + R_2} \quad (3.9)$$

Diz-se que duas resistências estão ligadas em paralelo, se os dois terminais de cada uma das resistências estiverem ligados entre os mesmos pontos, como mostra a figura 3.15.



**Figura 3.15.:** Duas resistências em paralelo.

Num sistema de duas resistências ligadas em paralelo, a diferença de potencial é a mesma nas duas resistências. A corrente no sistema é a soma das correntes em cada resistência:

$$I = I_1 + I_2 = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Delta V \quad (3.10)$$

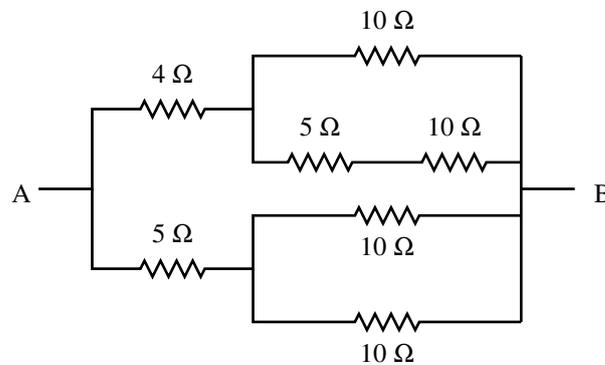
Assim, o sistema é equivalente a uma única resistência  $R_p$  que verifica a equação

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{ou:} \quad R_p = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.11)$$

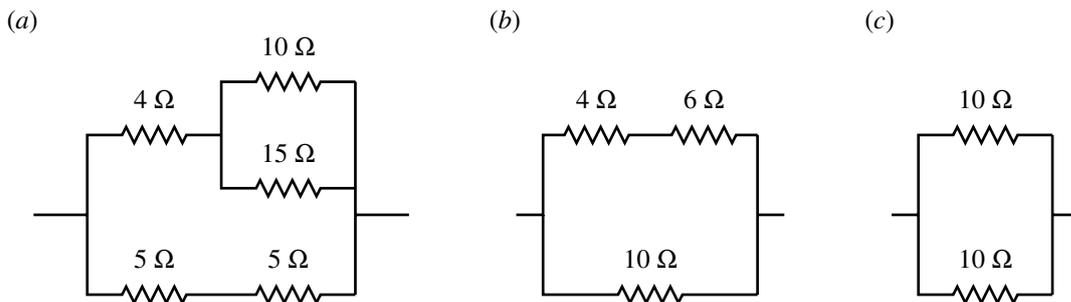
Em alguns sistemas com várias resistências é possível simplificar o sistema substituindo sucessivamente as resistências que se encontrarem em série ou em paralelo por uma resistência equivalente, até obter uma única resistência equivalente.

### Exemplo 3.2

No circuito da figura, calcule a corrente através de cada uma das resistências, quando a diferença de potencial  $V_A - V_B$  for igual a 12 V.



**Resolução.** Se substituirmos sucessivamente as resistências que encontrarmos ligadas em série ou em paralelo, o circuito entre A e B pode ser simplificado em 3 passos:



Repare que não precisamos reduzir o circuito até ficar com uma única resistência equivalente, porque no passo (c) já podemos calcular as correntes: como em cada uma das resistências em (c) a diferença de potencial é de 12 V, a corrente através de cada uma delas será  $12/10 = 1.2$  A.

Uma vez calculadas as correntes e diferenças de potencial em (c), podemos resolver o circuito da figura (b): as correntes em todas as 3 resistências são neste caso 1.2 A; portanto, a diferença de potencial na resistência de 6 Ω será  $6 \times 1.2 = 7.2$  V.

A seguir podemos analisar o circuito da figura (a); as correntes nas resistências de  $4\ \Omega$  e  $5\ \Omega$  são as mesmas que já foram calculadas em (b), nomeadamente,  $1.2\ \text{A}$ . Nas resistências de  $10\ \Omega$  e  $15\ \Omega$  a diferença de potencial é  $7.2\ \text{V}$ , como já foi calculado para a resistência equivalente em paralelo. Assim, as correntes nessas duas resistências são:

$$I_{10} = 7.2/10 = 0.72\ \text{A}$$

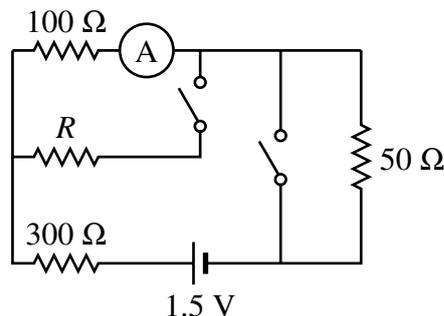
$$I_{15} = 7.2/15 = 0.48\ \text{A}$$

Finalmente, no circuito original a corrente nas resistências de  $5\ \Omega$  e  $10\ \Omega$  em série será igual a  $I_{15}$ , e a corrente nas duas resistências de  $10\ \Omega$  em paralelo será distribuída por igual, passando  $0.6\ \text{A}$  por cada resistência.

Resumindo, no ponto A entra uma corrente total de  $2.4\ \text{A}$ , passando  $1.2\ \text{A}$  pelas resistências de  $4\ \Omega$  e  $5\ \Omega$ . Ao ponto B chegam quatro correntes: uma corrente de  $0.72\ \text{A}$  da resistência de  $10\ \Omega$  na parte superior, uma corrente de  $0.48\ \text{A}$  que percorre as resistências de  $10\ \Omega$  e  $5\ \Omega$  em série, e duas correntes de  $0.6\ \text{A}$  que passam por cada uma das resistências de  $10\ \Omega$  em paralelo. A corrente total que sai em B é  $2.4\ \text{A}$ .

### Exemplo 3.3

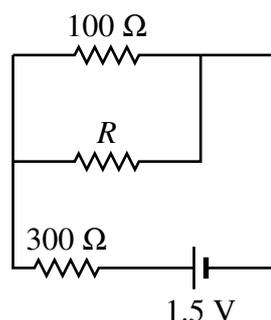
No circuito representado pelo diagrama da figura, a leitura do amperímetro é a mesma quando os dois interruptores estão abertos e quando os dois estão fechados. Calcule a resistência  $R$ .



**Resolução.** Quando os dois interruptores estão abertos, não passa nenhuma corrente pela resistência  $R$ , e as 3 resistências de  $300\ \Omega$ ,  $100\ \Omega$  e  $50\ \Omega$  estão em série, porque por elas passa a mesma corrente. Assim, a resistência equivalente é  $450\ \Omega$  e a corrente medida no amperímetro é:

$$I_1 = \frac{1.5}{450} = \frac{1}{300}\ \text{A}$$

Quando os dois interruptores estão fechados, não passa nenhuma corrente pela resistência de  $50\ \Omega$  e o circuito equivalente é:



Como a leitura do amperímetro é a mesma do que no caso anterior, a corrente que passa pela resistência de  $100 \Omega$  é também  $I_1$  e, portanto, a diferença de potencial nas resistências de  $100 \Omega$  e  $R$  é:

$$\Delta V_1 = 100I_1 = \frac{100}{300} = \frac{1}{3} \text{ V}$$

A diferença de potencial na e a corrente na resistência de  $300 \Omega$  são:

$$\Delta V_2 = 1.5 - \Delta V_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6} \text{ V} \quad I_2 = \frac{\Delta V_2}{300} = \frac{7}{1800} \text{ A}$$

Assim, a corrente que passa por  $R$  é:

$$I_3 = I_2 - I_1 = \frac{7}{1800} - \frac{1}{300} = \frac{1}{1800} \text{ A}$$

finalmente, o valor de  $R$  é:

$$R = \frac{\Delta V_1}{I_3} = \frac{1800}{3} = 600 \Omega$$

## Perguntas

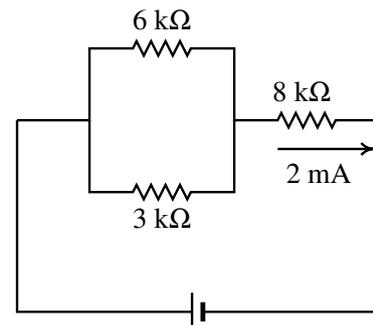
- A resistência de um condutor metálico é igual a  $6.5 \text{ k}\Omega$ , a  $20^\circ\text{C}$ . Quando a temperatura aumenta para  $60^\circ\text{C}$ , a resistência aumenta para  $8 \text{ k}\Omega$ . Calcule o valor do coeficiente de temperatura,  $\alpha_{20}$  (todas as respostas estão em unidades de  $^\circ\text{C}^{-1}$ )
  - $0.0049$
  - $0.0058$
  - $0.0250$
  - $0.0115$
  - $0.0038$
- Aplica-se a mesma diferença de potencial a dois cabos diferentes. O cabo A transporta duas vezes mais corrente do que o cabo B. Se a resistência do cabo B for  $R$ , qual será a resistência do cabo A?
  - $R$
  - $2R$
  - $R/2$
  - $4R$
  - $R/4$
- Dois fios de cobre têm o mesmo volume, mas o fio 2 é 20% mais comprido que o fio 1. A relação entre as resistências dos dois fios,  $R_2/R_1$ , é igual a:
  - $1.20$
  - $0.83$
  - $1.11$
  - $0.91$
  - $1.44$
- Duas lâmpadas importadas da América do Sul têm as especificações  $110 \text{ V}$ ,  $75 \text{ W}$ . As duas lâmpadas foram ligadas em série na rede elétrica portuguesa com  $220 \text{ V}$ . Qual das seguintes lâmpadas produz a mesma intensidade luminosa, quando forem ligadas a  $220 \text{ V}$ ?
  - $220 \text{ V}$ ,  $75 \text{ W}$
  - $110 \text{ V}$ ,  $150 \text{ W}$
  - $220 \text{ V}$ ,  $150 \text{ W}$
  - $110 \text{ V}$ ,  $75 \text{ W}$
  - $55 \text{ V}$ ,  $150 \text{ W}$

5. Três aquecedores elétricos idênticos de 1000 W a 100 V (nomeadamente, se um deles for ligado a uma tensão de 100 V, dissipa 1000 W) são ligados em série a uma tensão de 120 V; qual será a potência dissipada pelo sistema?
- A. 0.48 kW      D. 3.0 kW  
 B. 1.0 kW      E. 3.6 kW  
 C. 1.2 kW

## Problemas

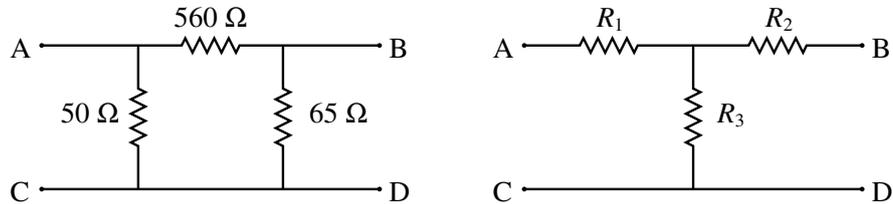
1. A temperatura num dado momento é  $12^\circ\text{C}$ . Quanto deve aumentar a temperatura para que a resistência de um fio de cobre aumente 10 %?
2. Um fio condutor de 1 m de comprimento tem uma resistência de  $0.3\ \Omega$ . O fio é esticado até o seu comprimento aumentar para 2 m. Qual será o novo valor da resistência?
3. A diferença de potencial entre os elétrodos de uma bateria é 3 V quando a bateria é percorrida por uma corrente de 4 A, no sentido do eletrodo negativo para o positivo. Quando a corrente é de 2 A, no sentido oposto, a diferença de potencial aumenta até 12 V. (a) Calcule a resistência interna da bateria. (b) Qual é a fem da bateria?
4. Uma bateria encontra-se em curto-circuito, quando os dois elétrodos são ligados um ao outro por meio de um condutor com resistência praticamente nula. Calcule a corrente de curto circuito em função da fem  $\mathcal{E}$  e da resistência interna  $r$  da bateria.
5. A resistência de uma lâmpada incandescente de 60 W e 230 V, à temperatura ambiente de  $20^\circ\text{C}$ , é  $R = 65\ \Omega$ . No entanto, as especificações do fabricante (60 W e 230 V) conduzem a um valor muito mais elevado da resistência. Justifique, calculando a temperatura do filamento de tungsténio quando a lâmpada se encontra acesa.

6. No circuito representado na figura, foi medida a corrente na resistência de  $8\ \text{k}\Omega$  e obteve-se o valor de 2 mA. Use esses dados para calcular o valor da fem e a diferença de potencial em cada resistência.

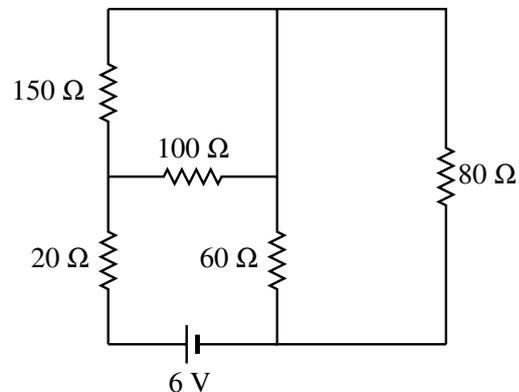


7. Uma bateria tem fem  $\mathcal{E}$  e resistência interna  $r$ .
  - a) Calcule o valor da resistência  $R$  de um circuito que, quando for ligado a essa bateria, consiga absorver a máxima potência possível.
  - b) Calcule o valor da potência máxima que a bateria pode fornecer a um circuito, em função de  $\mathcal{E}$  e  $r$ .
  - c) Numa fonte de alimentação de um PC, entre os cabos vermelho e preto há uma fem de 5 V; numa fonte de 400 W, a potência máxima entre esses cabos é de 125 W. Calcule a resistência interna entre esses cabos.
  - d) Na alínea anterior, qual seria a vantagem de usar uma fonte com uma potência máxima maior?

8. O circuito do lado esquerdo na figura, com quatro terminais, vai ser substituído pelo circuito equivalente do lado direito. Calcule os valores que deverão ter  $R_1$ ,  $R_2$ , e  $R_3$  (sugestão: C e D são o mesmo ponto; a resistência equivalente entre os pontos AB, AC e BC deverá ser a mesma nos dois circuitos).



9. Um fio condutor de cobre de 1.29 mm de diâmetro e isolamento de borracha pode suportar, com segurança, uma corrente máxima de 6 A. (a) Qual é a diferença de potencial que pode ser aplicada a 40 m deste fio? (c) Calcule a potência dissipada no fio quando a corrente for 6 A.
10. Um fio de níquel-crômio de 1.8 mm de diâmetro vai ser usado para construir uma caldeira de água que produza 8 g de vapor de água por segundo. A fonte de alimentação a ser usada fornece tensão contínua de 220 V. Calcule o comprimento que deve ter o fio. (O calor de evaporação da água é de 2257.2 J/g.)
11. Dois fios de cobre e de tungstênio, têm o mesmo diâmetro de 0.1 mm. O fio de cobre tem 32 cm de comprimento e o de tungstênio 10 cm. Calcule a temperatura em que a resistência dos dois fios será igual.
12. Calcule a potência dissipada em cada resistência no circuito e a potência fornecida pela fem. Confira que a potência fornecida pela fem é igual à soma das potências dissipadas em todas as resistências.



## 4. Condensadores



Em 1745, o holandês Pieter van Musschenbroek inventou o primeiro **condensador**. Enquanto usava uma garrafa de vidro para isolar uma lâmina metálica no seu interior, descobriu que quando segurava a garrafa na mão, a carga elétrica que conseguia armazenar era muito maior do que quando a garrafa estava sobre a mesa. A razão para esse aumento é que na mão, que é um condutor, são induzidas cargas de sinal contrário que atraem as cargas no metal, permitindo que seja mais fácil introduzir mais cargas do mesmo sinal. Colocando uma segunda lâmina metálica por fora da garrafa, facilita-se a entrada de cargas na garrafa, podendo ser armazenadas cargas muito elevadas.

A invenção de van Musschenbroek é atualmente designada de **garrafa de Leiden**, provavelmente devido à complexidade do seu apelido e porque Leiden é a cidade onde viveu. Trata-se de uma das invenções mais importantes na história da eletricidade, pois permitia que fossem armazenadas cargas maiores, facilitando a realização de experiências de eletrostática. Hoje em dia outros condensadores semelhantes à garrafa de Leiden, mas muito mais pequenos, são usados frequentemente nos circuitos elétricos. Em qualquer circuito onde for preciso que a corrente varie rapidamente, por exemplo num amplificador de áudio, é preciso utilizar condensadores; os condensadores acumulam cargas em alguns intervalos, que são logo libertadas em outros instantes.

## 4.1. Capacidade de um condutor isolado

O potencial num condutor isolado é uniforme em todo o condutor e proporcional à carga total no condutor. Define-se a **capacidade** do condutor, igual à relação entre a carga e o potencial na superfície do condutor (arbitrando que o potencial é nulo no infinito)

$$C = \frac{Q}{V_{\text{sup}}} \quad (4.1)$$

A capacidade não dependerá nem da carga nem do potencial, pois os dois aumentam na mesma proporção; a capacidade depende unicamente da forma e tamanho do condutor. O potencial  $V$  é medido em relação a um ponto no infinito.

No sistema internacional de unidades, a capacidade é medida em farads. Um farad, designado pela letra  $F$ , é a capacidade de um condutor que, quando nele for colocada uma carga de  $1 \text{ C}$ , o potencial resultante será de  $1 \text{ V}$ :

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V} \quad (4.2)$$

Uma capacidade de  $1 \text{ F}$  é muito elevada, na prática é comum encontrar-mos capacidades de  $\mu\text{F}$ ,  $\text{nF}$  ou  $\text{pF}$ .

## 4.2. Esfera condutora isolada

Numa esfera condutora isolada, a carga acumula-se toda na superfície, e de forma uniforme, devido à simetria da esfera. Se a carga total na esfera for  $Q$ , a força sobre uma carga pontual  $q$ , a uma distância  $r$  do centro da esfera, será igual à força que produziria uma carga pontual  $Q$  no centro da esfera. Assim, o campo elétrico produzido pela esfera é igual ao campo produzido por uma carga pontual  $Q$  com componente radial dada pela equação 1.5:

$$E = \frac{kQ}{r^2} \quad (4.3)$$

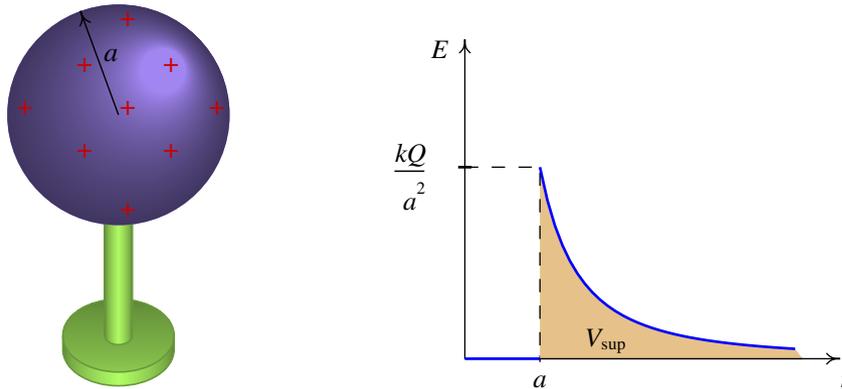
onde  $k$  é a constante de Coulomb ( $9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ ).

A energia potencial elétrica que terá uma carga pontual  $q$  quando for colocada na superfície da esfera, é dada pela equação 2.6:  $U = qV_{\text{sup}}$ , onde  $V_{\text{sup}}$  é a diferença de potencial entre um ponto na superfície da esfera e um ponto no infinito, onde a esfera já não produz nenhuma energia potencial na carga  $q$ .

Para calcular  $V_{\text{sup}}$  aplica-se a definição da diferença de potencial (equação 2.5), usando um percurso de integração que segue a direção radial das linhas de campo:

$$V_{\text{sup}} = - \int_{\infty}^a E \, dr = -kQ \int_{\infty}^a \frac{1}{r^2} \, dr = \frac{kQ}{a} \quad (4.4)$$

o valor desse integral é também igual à área sombreada na figura 4.1.



**Figura 4.1.:** Esfera condutora de raio  $a$ , isolada, com carga  $Q$ , e gráfico do módulo do campo elétrico produzido por essa esfera.

Portanto, a capacidade da esfera de raio  $a$  é:

$$C = \frac{Q}{V_{\text{sup}}} = \frac{a}{k} \quad (4.5)$$

quanto maior for a esfera, maior será a sua capacidade. Como já dizemos anteriormente, a capacidade não depende nem da carga armazenada na esfera, nem do potencial produzido por essa carga. A capacidade depende apenas do tamanho e da forma geométrica do condutor; neste caso apenas podia depender do raio da esfera.

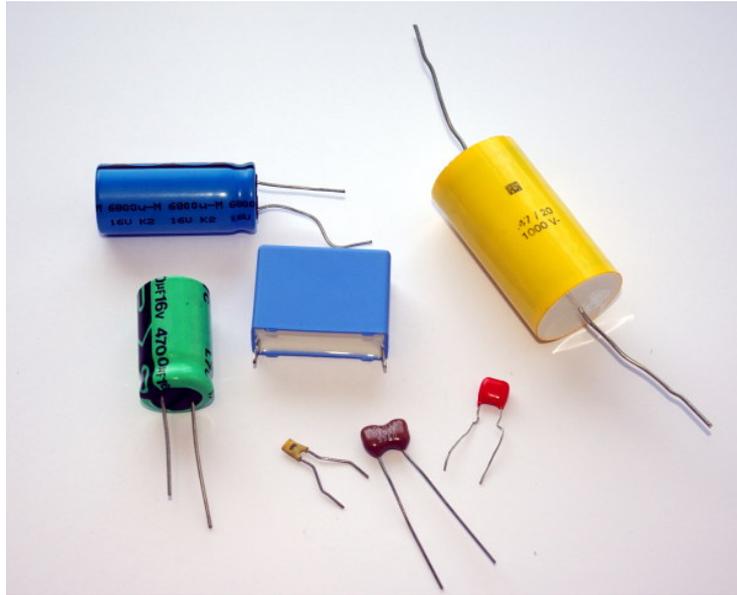
### 4.3. Condensadores

Na abertura do capítulo falámos da garrafa de Leiden, que foi o primeiro condensador construído na história. Os dois condutores separados por um isolador (neste caso vidro), designam-se de **armaduras**. Quando existirem cargas numa das armaduras serão induzidas cargas de sinal contrário na outra armadura, o que faz diminuir o potencial de cada armadura em relação ao potencial de referência (a **terra**). A diminuição do potencial do sistema de duas armaduras, comparado com o potencial que teria uma única armadura com a mesma carga, implica uma capacidade muito maior para o condensador em comparação com um único condutor isolado.

Se uma das armaduras tiver carga  $Q$  a outra terá carga  $-Q$ . Se  $\Delta V$  for a diferença de potencial entre as armaduras, define-se a capacidade do condensador assim:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (4.6)$$

Se entre as duas armaduras existir um isolador, a constante de coulomb,  $k$ , que entra no cálculo da diferença de potencial  $\Delta V$ , a partir da força, deverá ser substituída por



**Figura 4.2.:** Vários tipos diferentes de condensadores.

$k/K$ , onde  $K$  é a constante dielétrica do isolador. Consequentemente, com isolador a capacidade do condensador aumenta num fator  $K$ . Assim, na garrafa de Leiden a garrafa de vidro serve de isolador, mas também ajuda a aumentar a capacidade. Como vidro tem uma constante dielétrica aproximadamente igual a 6; a capacidade com a garrafa de vidro é aproximadamente 6 vezes maior da que se obtinha se não houvesse vidro entre as armaduras.

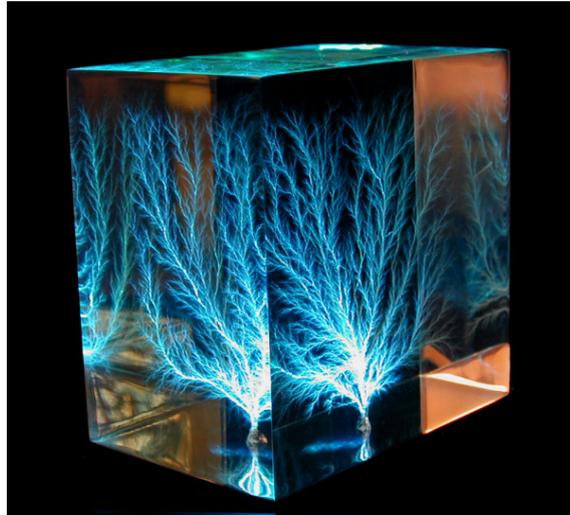
Quanto maior for a capacidade de um condensador, mais fácil será armazenar cargas nele. Existem vários modelos diferentes de condensadores, com diferentes formas e tamanhos (figura 4.2).

O isolador entre as armaduras de um condensador também é designado de dielétrico. O dielétrico também ajuda a aumentar a diferença de potencial máxima que pode existir entre as armaduras. Cada material isolador tem um valor da **rigidez dielétrica**, que é o valor máximo que pode ter a diferença de potencial, por unidade de comprimento, sem que as moléculas ou átomos do dielétrico sejam ionizados, formando-se fendas onde o material foi queimado (figura 4.3).

Em função da diferença de potencial no condensador,  $\Delta V$ , e da distância entre as armaduras,  $d$ , a rigidez do dielétrico é igual a:

$$E_{\text{máx}} = \left( \frac{\Delta V}{d} \right)_{\text{máx}} \quad (4.7)$$

Consequentemente, o valor máximo da diferença de potencial no condensador é igual à rigidez do dielétrico, vezes a distância entre as armaduras. Os diferentes modelos de condensadores (figura 4.2) têm diferentes capacidades e potenciais máximos segundo o



**Figura 4.3.:** Figura de Lichtenberg num bloco de acrílico que foi colocado dentro de um condensador ligado a uma tensão muito elevada que descarregou através do acrílico.

dielétrico que for usado. Em algumas aplicações também é necessário que o tempo de resposta do dielétrico seja rápido, já que as cargas induzidas nas moléculas do dielétrico não são induzidas de forma instantânea. A tabela 4.1 mostra a constante dielétrica e a rigidez dielétrica de vários materiais isoladores.

**Tabela 4.1.:** Constante dielétrica e rigidez dielétrica de alguns materiais.

Material	Constante dielétrica, $K$	Rigidez, $E_{\text{máx}}$ (kV/mm)
Água (20°C)	80	—
Ar seco	1.00059	3
Óleo	2.24	12
Papel	3.7	16
Acrílico	3.4	40
Vidro pirex	5.6	14
Porcelana	7	5.7
Poliéster	2.55	24
Parafina	2.1 - 2.5	10

A rigidez dielétrica do ar seco é 3 kV/mm. Quando a diferença de potencial entre dois objetos no ar ultrapasse 3000 V por cada milímetro de afastamento, produz-se uma descarga elétrica que descarrega os objetos de forma abrupta. As forças elétricas elevadas rompem as moléculas do ar, e a descarga é a passagem de iões positivos e negativos do ar entre os dois objetos.

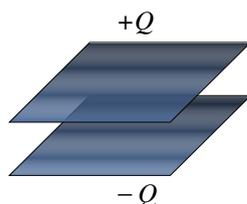


**Figura 4.4.:** Durante uma trovoadas, a humidade no ar facilita as descargas elétricas.

As nuvens e a terra, que são condutores, atuam como as armaduras de um condensador; o ar é o dielétrico. Durante uma trovoadas, a humidade do ar faz diminuir a rigidez dielétrica do ar, a diferença de potencial máxima entre as nuvens e a terra diminui, existindo a possibilidade de surgirem descargas elétricas (figura 4.4). Quanto mais perto das nuvens estiverem os objetos no chão, maior será a probabilidade de serem atingidos por um raio, porque  $\Delta V_{\text{máx}} = E_{\text{máx}}d$  será menor.

### 4.3.1. Condensador plano

Um condensador plano (figura 4.5) é formado por duas armaduras planas, de área  $A$ , paralelas e separadas por uma distância constante  $d$ . No capítulo 6 usaremos a lei de Gauss para calcular o módulo do campo elétrico dentro de um condensador plano; por enquanto, usaremos esse resultado: se as cargas nas armaduras forem  $Q$  e  $-Q$ , o campo elétrico entre as armaduras é aproximadamente constante e com módulo  $(4\pi kQ)/(KA)$ .



**Figura 4.5.:** Condensador plano.

A diferença de potencial entre as armaduras é igual ao módulo do campo elétrico, multiplicado pela distância entre as armaduras:

$$\Delta V = \frac{4\pi k Q d}{KA} \quad (4.8)$$

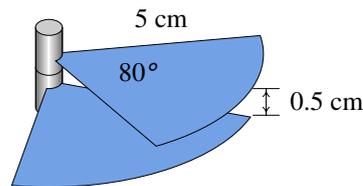
Por tanto, a partir da equação 4.6 obtém-se a expressão para a capacidade desse tipo de condensador:

$$C_{\text{plano}} = \frac{KA}{4\pi k d} \quad (4.9)$$

onde  $K$  é a constante dielétrica do isolador entre as duas armaduras, e  $k$  é a constante de Coulomb. A capacidade de um condensador plano é diretamente proporcional à área das armaduras, e inversamente proporcional à distância entre elas:

### Exemplo 4.1

Um condensador variável é formado por duas placas planas paralelas com forma de setor circular de ângulo  $80^\circ$  e raio 5 cm, que podem rodar à volta de um eixo comum, como mostra a figura. Se a distância entre as placas é 0.5 cm, calcule a capacidade máxima e a capacidade quando uma das placas roda  $30^\circ$  a partir da posição onde a capacidade é máxima.



**Resolução.** A capacidade máxima obtém-se quando as duas placas estão uma em frente da outra, de forma que a carga se distribui ao longo de toda a superfície das placas. O ângulo de  $80^\circ$  equivale a uma fração  $80/360$  do círculo completo; portanto, a área das armaduras é:

$$A = \frac{80\pi 5^2}{360} = \frac{50\pi}{9} \text{ cm}^2$$

A capacidade é dada pela expressão 4.9, com a constante dielétrica do ar,  $K = 1$ :

$$C_{\text{máx}} = \frac{0.005\pi}{4\pi \times 9 \times 10^9 \times 9 \times 0.005} = 3.1 \text{ pF}$$

Quando uma das placas roda  $30^\circ$ , a área na qual a carga se distribui, corresponde apenas à área da parte das placas que se encontra em frente uma da outra, ou seja, um setor circular de ângulo  $50^\circ$ . Portanto a área é  $5/8$  da área total das armaduras e a capacidade, sendo diretamente proporcional à área, será  $5/8$  da capacidade máxima:

$$C = \frac{5}{8} C_{\text{máx}} = 1.9 \text{ pF}$$

### 4.3.2. Ultracondensadores

Um condensador pode cumprir uma função semelhante à de uma bateria, já que pode ser usado para armazenar cargas que são fornecidas a um circuito. A grande vantagem é que, como não há reações químicas envolvidas, a carga e descarga podem ser feitas muito rapidamente e um condensador não fica inutilizado após várias cargas e descargas, que é o que acontece a uma bateria recarregável. Imagine por exemplo que em vez de ter que esperar algumas horas para recarregar a bateria do telemóvel, esta ficasse imediatamente recarregada quando fosse ligada à tomada, e que nunca tivesse que trocá-la por uma nova. Isso está cada vez mais perto de ser uma realidade, com o desenvolvimento dos ultracondensadores.

A dificuldade em usar um condensador normal como fonte é que à medida que o condensador descarrega, a diferença de potencial entre as suas armaduras decresce rapidamente. Outra desvantagem ainda maior é que a capacidade de armazenar carga não é tão elevada como nas baterias. Consideremos por exemplo a pilha recarregável no problema 6 na página 31. O valor da fem é 1.2 V, e a carga máxima armazenada é de  $2300 \text{ mA} \cdot \text{h} = 8.28 \text{ kC}$ . De acordo com a equação 4.6, seria necessário um condensador de 6.9 kF para armazenar essa carga, com essa diferença de potencial.



Figura 4.6.: Alguns ultracondensadores.

Uma capacidade tão elevada era algo impensável, até finais do século passado. Um condensador tradicional, do tamanho da pilha no problema 6, teria uma capacidade na ordem dos  $\mu\text{F}$ . Os condensadores eletrolíticos atinge capacidades superiores, mas ainda aquém dos quilo-farad. Recentemente têm sido produzidos **ultracondensadores**, com capacidades muito mais elevadas, na ordem dos quilo-farad.

Por exemplo, o ultracondensador cilíndrico na frente, na figura 4.6 tem uma capacidade de 3000 farads, a 2.7 volts. Com esses valores, a carga que se consegue armazenar é de 8.1 kC já muito perto da carga numa pilha recarregável. A capacidade elevada também implica que demora muito mais tempo a descarregar quando for ligado a um circuito. Ainda falta reduzir um pouco o tamanho para que seja competitivo com as atuais baterias de iões de lítio.



**Figura 4.7.:** Autocarro experimental a hidrogénio da STCP no Porto.

Nos ultracondensadores usa-se um meio poroso. A área de contato entre eléctrodos e eletrólito é muito elevada. Uma das aplicações atuais dos ultracondensadores é em combinação com os motores eléctricos dos automóveis que funcionam a hidrogénio com células de combustível (figura 4.7), que já estão a ser comercializados em alguns países.

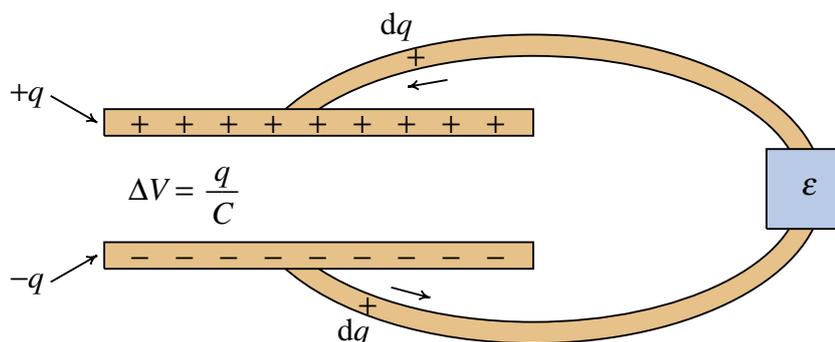
O ultracondensador permite acumular rapidamente as cargas produzidas pelas células de combustível ou pelos travões eletromagnéticos, e essa carga pode ser fornecida rapidamente, nos momentos em que for preciso acelerar. As únicas reações químicas produzidas nesse tipo de veículo é a combinação do hidrogénio com oxigénio nas células de combustível, que produz vapor de água. Não são libertados gases nocivos para a atmosfera, nem existem baterias a produzir produtos químicos corrosivos.

Os ultracondensadores podem fornecer carga e serem recarregados muito mais rapidamente do que uma bateria e sem sofrer o desgaste que faz com que a bateria tenha um número limitado de ciclos de carga e descarga.

## 4.4. Energia elétrica armazenada num condensador

Para carregar um condensador, é preciso carregar uma das armaduras com carga  $Q$  e a outra com carga  $-Q$ . O processo implica uma transferência de carga  $Q$  de uma armadura para a outra. Essa passagem pode ser devida à ligação de dois cabos nas armaduras e nos terminais de uma bateria (figura 4.8).

Para calcular a energia dispensada nesse processo, imaginemos que a carga total  $Q$  foi transferida em pequenas cargas infinitesimais  $dq$  desde uma das armaduras até a outra, como se mostra na figura 4.8. Cada vez que uma carga  $dq$  passa da armadura negativa para



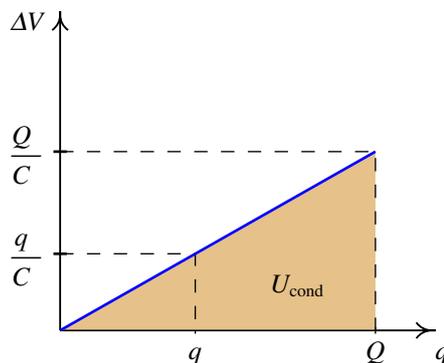
**Figura 4.8.:** Passagem da carga de uma armadura para a outra num condensador.

a positiva, ganha uma energia potencial elétrica

$$dU_e = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq \quad (4.10)$$

A energia total armazenada no condensador obtém-se por integração, desde  $q = 0$ , até  $q = Q$  (área sob a reta no gráfico de  $\Delta V$  em função de  $q$ , na figura 4.9). O resultado é:

$$U_{\text{cond}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (4.11)$$



**Figura 4.9.:** Aumento da diferença de potencial no condensador, em função da carga nas armaduras.

Usando a equação 4.6, que relaciona a carga e a diferença de potencial em qualquer condensador, a equação 4.11 pode ser escrita em outras duas formas alternativas:

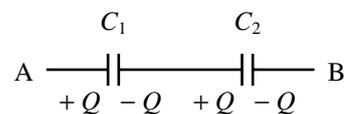
$$U_{\text{cond}} = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C \Delta V^2 \quad (4.12)$$

A carga não será transferida para as armaduras de forma instantânea. Quando ligarmos um condensador a uma fonte, a carga aumentará gradualmente até uma carga final. O processo de aumento da carga, em função do tempo, denomina-se resposta transitória do condensador; se a resistência entre a fonte e as armaduras do condensador não for muito elevada, a resposta transitória será extremamente rápida e podemos admitir que a carga no condensador já tem o seu valor final estável. No capítulo sobre processamento de sinais veremos como determinar a resposta transitória.

## 4.5. Associações de condensadores

Um sistema de condensadores pode ser substituído por um único condensador equivalente. Nos casos em que os condensadores estejam ligados em série ou em paralelo, é fácil calcular a capacidade que deverá ter o condensador equivalente.

A figura 4.10 mostra dois condensadores ligados em série, entre os pontos A e B. Se os condensadores estiverem inicialmente descarregados, no momento em que for introduzida uma diferença de potencial entre os pontos A e B, circulará uma carga  $Q$  que entra pelo ponto a maior potencial (A na figura) e sae pelo ponto a menor potencial. Na região central, que liga as duas armaduras comuns dos dois condensadores, são induzidas cargas  $Q$  e  $-Q$  (a carga total nessa região é nula). Assim, a carga armazenada em cada um dos condensadores é a mesma.



**Figura 4.10.:** Condensadores ligados em série.

A diferença de potencial entre os pontos A e B será a soma das diferenças de potencial em cada um dos condensadores:

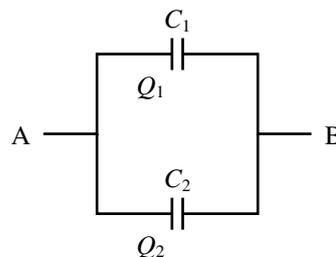
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q \quad (4.13)$$

Assim, o sistema é equivalente a um único condensador com capacidade que verifica a equação:

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{ou:} \quad \boxed{C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \quad (4.14)$$

A carga armazenada no condensador equivalente é a mesma que em cada um dos condensadores em série.

A figura 4.11 mostra um sistema de dois condensadores ligados em paralelo entre dois pontos A e B. A diferença de potencial será sempre igual nos dois condensadores, e igual à diferença de potencial entre os pontos A e B.



**Figura 4.11.:** Condensadores ligados em paralelo.

Se os condensadores estiverem inicialmente descarregados, no momento em que for introduzida uma diferença de potencial entre os pontos A e B, entrará carga positiva nas

armaduras que estiverem ligadas ao ponto com maior potencial, e sairá a mesma quantidade de carga das armaduras ligadas ao ponto com menor potencial. Mas a quantidade de carga que entra em cada condensador não tem que ser a mesma; a carga total que entra e sai entre os pontos A e B é:

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) \Delta V \quad (4.15)$$

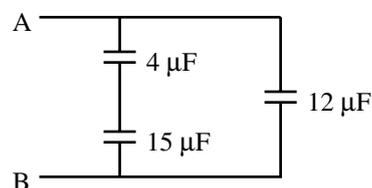
Assim, o sistema é equivalente a um único condensador com capacidade igual à soma das duas capacidades dos condensadores:

$$C_p = C_1 + C_2 \quad (4.16)$$

### Exemplo 4.2

Considere o circuito representado na figura e calcule:

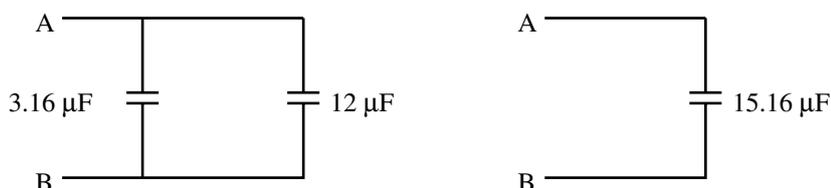
(a) A capacidade equivalente entre A e B. (b) A carga armazenada em cada condensador quando a diferença de potencial é  $V_{BA} = 200$  V. (c) A energia total armazenada no circuito.



**Resolução.** Os condensadores de  $4 \mu\text{F}$  e  $15 \mu\text{F}$  encontram-se em série e, portanto, podem ser substituídos por um só condensador de capacidade:

$$C_{\text{eq}} = \frac{4 \times 15}{4 + 15} \mu\text{F} = 3.16 \mu\text{F}$$

este condensador está ligado em paralelo com o condensador de  $12 \mu\text{F}$ , de maneira que a capacidade total é  $15.16 \mu\text{F}$ .



Nos dois condensadores de  $12 \mu\text{F}$  e  $3.16 \mu\text{F}$  a diferença de potencial é igual a  $V_{BA}$ ; assim, as cargas nesses condensadores são:

$$Q_{12} = 200 \times 12 \times 10^{-6} = 2.4 \text{ mC} \quad Q_{3.16} = 200 \times 3.16 \times 10^{-6} = 632 \mu\text{C}$$

As cargas nos condensadores de  $4 \mu\text{F}$  e  $15 \mu\text{F}$  são iguais porque estão ligados em série:

$$Q_4 = Q_{15} = 632 \mu\text{C}$$

A energia total pode ser calculada somando as energias armazenadas em cada um dos condensadores; a resposta deve ser a mesma em qualquer dos circuitos equivalentes. Usando o circuito mais simples, com um só condensador de  $15.16 \mu\text{F}$ , obtemos:

$$U_t = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} 15.16 \times 10^{-6} \times 200^2 = 0.303 \text{ J}$$

## Perguntas

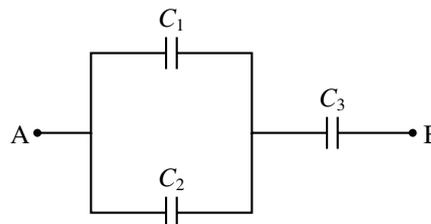
- A capacidade elétrica de um condutor isolado:
  - Diminui se o condutor tiver um dielétrico à sua volta.
  - Não depende do seu tamanho.
  - Mede-se em unidades de J/C.
  - É igual ao trabalho necessário para deslocar uma carga desde o infinito até o condutor.
  - É independente da carga acumulada no condutor.
- Qual deve ser a capacidade de um condensador se quisermos, a uma diferença de potencial de 9.0 V, armazenar um excesso de  $10^{10}$  elétrons na placa negativa?
  - 14 nF
  - 180 nF
  - 180 pF
  - 14 pF
  - 5.6 pF
- Qual é a capacidade de um condensador de placas paralelas circulares, com 5 cm de raio, separadas de 1 cm?
  - 7.0 pF
  - 22.0 pF
  - 2.2 pF
  - 0.22 nF
  - 0.7 nF
- Aumentando a carga de um condensador de placas paralelas de  $3 \mu\text{C}$  para  $9 \mu\text{C}$  e diminuindo a separação entre as placas de 1 mm para 3 mm, a energia armazenada no condensador varia de um fator
  - 9
  - 3
  - 8
  - 27
  - 1/3
- Num sistema de dois condensadores ligados em paralelo, qual das seguintes afirmações é verdadeira?
  - A capacidade equivalente é menor que as capacidades dos dois condensadores.
  - A carga armazenada nos dois condensadores é a mesma.
  - A carga armazenada será maior no condensador com maior capacidade.
  - A diferença de potencial será maior no condensador com maior capacidade.
  - A diferença de potencial será maior no condensador com menor capacidade.

## Problemas

- Um flash fotográfico típico fornece 2 kW durante aproximadamente 2 ms. Essa energia é obtida descarregando um condensador de  $50 \mu\text{F}$ . (a) Até que diferença de potencial deverá ser carregado o condensador? (b) Se o condensador fosse substituído por outro de  $250 \mu\text{F}$ , até que diferença de potencial deveria ser carregado? (c) Qual seria a desvantagem em usar o condensador com maior capacidade?
- Um condensador esférico é formado por duas esferas condutoras de raios  $a$  e  $b$  ( $b > a$ ), separadas por vidro que preenche o espaço entre os dois condutores. No condutor externo e no vidro é feito um orifício que permite ligar o eletrodo do condutor interno. (a) Calcule a capacidade desse condensador, em função de  $a$ ,  $b$  e a constante dielétrica

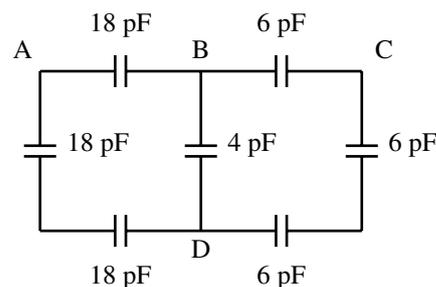
do vidro,  $K$ . (Sugestão: repita os cálculos da seção 4.2, tendo em conta que a força é mais fraca, devido à constante dielétrica, e o integral vai desde  $a$  até  $b$ .) (b) Calcule a capacidade de um condensador com  $a = 4.0$  cm,  $b = 4.3$  cm e  $K = 6.2$ . (c) Qual a relação entre a capacidade desse condensador e a de uma esfera isolada de raio  $a = 4.0$  cm?

3. No sistema de três condensadores apresentado na figura,  $C_1 = 1.2 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 4.3 \mu\text{F}$  e  $C_3 = 2.5 \mu\text{F}$ . Entre os pontos A e B liga-se uma bateria de 9.0 V. (a) Calcule a carga acumulada em cada condensador. (b) Calcule a energia total armazenada no sistema.

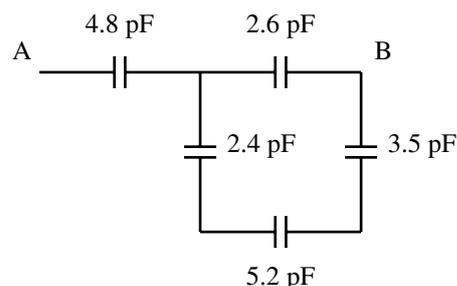


4. Um condensador de placas planas e paralelas distanciadas 1 cm e de  $12 \text{ cm}^2$  de área, está totalmente preenchido por dois dielétricos, cada um com espessura igual a 0.5 cm e a mesma área das placas. Calcule a capacidade do condensador sabendo que as constantes dos dielétricos são 4.9 e 5.6 (sugestão: admita que o condensador é equivalente a dois condensadores em série, cada um com um dielétrico diferente).
5. Considere um condensador de placas planas e paralelas, de área  $0.3 \text{ m}^2$  e distanciadas 0.5 cm. Entre as placas encontra-se uma chapa de acrílico com a mesma área e espessura igual a 0.5 cm. O condensador é carregado até a diferença de potencial ser igual a 12 V e, de seguida, é desligado da fonte usada para o carregar. (a) Qual é o trabalho necessário para retirar a chapa de acrílico de entre as placas do condensador? (b) Calcule o potencial de ruptura com dielétrico e depois de este ser removido.
6. Dois condensadores de  $10 \mu\text{F}$  e  $20 \mu\text{F}$  ligam-se em série a uma fonte de 1200 V. (a) Calcule a carga em cada condensador. (b) A fonte é logo desligada, ligando-se entre si os dois condensadores (armadura positiva com positiva e negativa com negativa). Calcule a diferença de potencial e carga final em cada condensador.

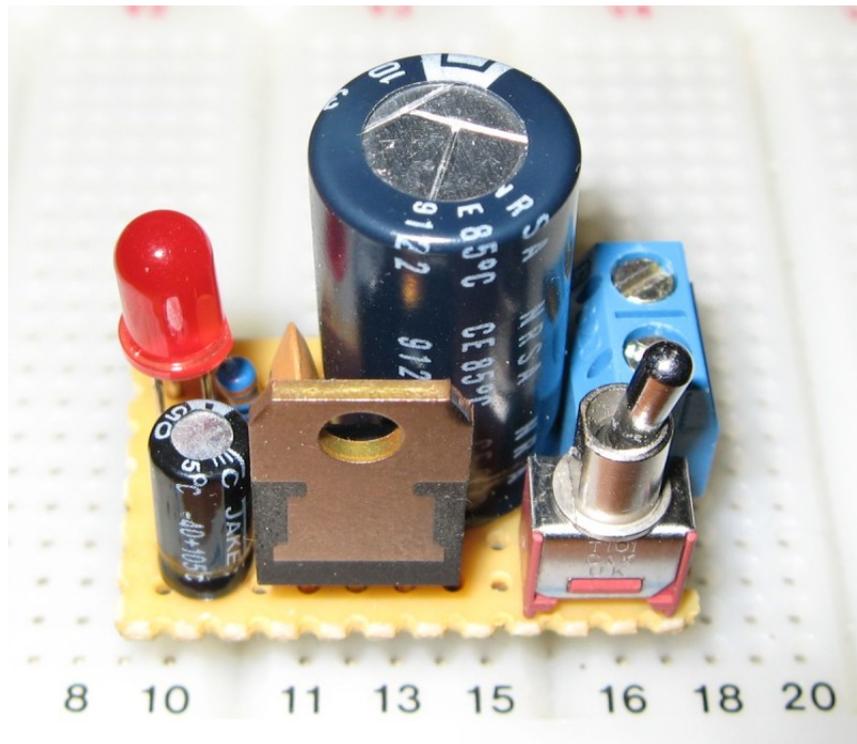
7. No circuito da figura, calcule a capacidade equivalente: (a) Entre os pontos B e D. (b) Entre os pontos A e B.



8. Os condensadores no circuito da figura encontram-se inicialmente descarregados. Calcule a carga que ficará armazenada no condensador de  $2.4 \text{ pF}$  quando os terminais de uma fonte, com força eletromotriz de 5 V, forem ligados nos pontos A e B.



## 5. Circuitos de corrente contínua



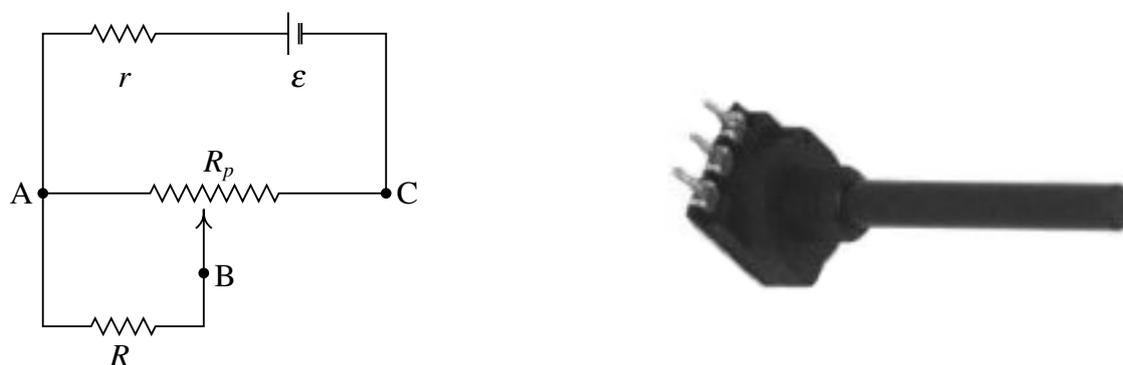
Os elementos de circuitos são produzidos com terminais de tamanho padrão para facilitar a montagem dos circuitos. Uma forma rápida de montar circuitos é usar uma placa de teste, como temos sugerido em capítulos anteriores. Para construir circuitos mais duradouros, pode ser usada uma placa de circuito (também conhecida como *stripboard*), que é uma placa de um material isolador com furos e com pistas paralelas de cobre num lado dos lados; o contato entre diferentes componentes é feito inserindo os terminais em furos que estejam na mesma pista, tal como na placa de teste, mas é preciso soldar os terminais sobre o cobre. Outro método que permite construir circuitos mais compactos, são as placas de circuito impresso (PCB). Um PCB é semelhante a uma placa de circuito, mas as pistas de cobre e os furos são desenhados sob medida para cada circuito específico.

Um circuito de corrente contínua, ou circuito c.c. (em inglês, *Direct Current*, d.c.), é um circuito em que todas as fontes de tensão têm força eletromotriz constante e todas as resistências são constantes. Se no circuito forem ligados condensadores, a corrente mudará em função do tempo (resposta transitória do circuito), mas passado algum tempo a carga e tensão nos condensadores atingirão os seus valores finais..

Neste capítulo veremos como calcular os valores iniciais e finais das correntes e as cargas e no capítulo sobre processamento de sinais veremos como pode ser analisada a resposta transitória de um circuito de corrente contínua.

## 5.1. Diagramas de circuito

Para poder estudar um circuito mais facilmente, convém representá-lo por um diagrama de circuito. Por exemplo, a figura 5.1 mostra o diagrama de circuito de um **divisor de voltagem**. Os pontos A, B e C são os 3 terminais de um potenciômetro (lado direito da figura 5.1), que é formado por um arco de círculo de um material condutor, entre os terminais nos dois extremos, A e C, e um contato móvel, ligado ao terminal central B, que pode ser deslocado sobre o arco condutor, rodando o eixo do potenciômetro. Assim, entre A e C temos uma resistência constante,  $R_p$ , e entre A e B temos uma resistência que pode ser modificada, entre 0 e  $R_p$ , rodando o eixo.

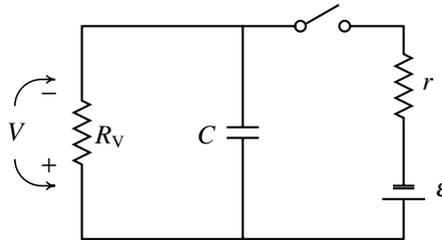


**Figura 5.1.:** Diagrama de circuito de um divisor de voltagem e fotografia de um potenciômetro.

Entre os pontos A e C do potenciômetro foi ligada uma pilha com fem  $\varepsilon$  e resistência interna  $r$ . As saídas do divisor de voltagem são os pontos A e B, onde foi ligada uma resistência  $R$ . Quando o contato móvel, B, do potenciômetro é deslocado entre A e C, a diferença de potencial na resistência  $R$  será a mesma que nos pontos A e B, que é diretamente proporcional à resistência do potenciômetro entre A e B. Assim, consegue-se obter em  $R$  uma diferença de potencial que pode ser ajustada entre 0 e um valor máximo.

Outro exemplo de diagrama de circuito é a montagem usada para carregar um condensador e a seguir observar como diminui a diferença de potencial quando o condensador é descarregado através de um volímetro. O diagrama do circuito é apresentado na figura

5.2. Como a pilha é ligada por alguns instantes, para carregar o condensador, e é logo desligada, foi desenhado um interruptor que no estado fechado corresponde ao caso em que a pilha está ligada, e no estado aberto representa o caso em que a pilha está desligada.



**Figura 5.2.:** Carga e descarga de um condensador.

O voltímetro foi representado no diagrama por meio da sua resistência interna  $R_V$ . Geralmente, admite-se que o voltímetro não interfere com o circuito, sendo representado apenas pelas setas com sinais positivo e negativo, que indicam os pontos onde foram ligados os terminais positivo e negativo do voltímetro. Neste caso a resistência do voltímetro sim é importante e, por isso, foi desenhada. Um voltímetro ideal teria uma resistência infinita, que não permitiria que o condensador descarregasse, permanecendo a sua diferença de potencial constante. Num voltímetro real, a carga no condensador produz uma corrente através do voltímetro, que faz com que a carga diminua e, conseqüentemente, a diferença de potencial decresça.

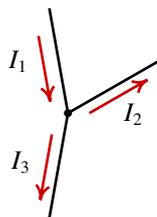
## 5.2. Leis dos circuitos

A análise de um circuito consiste em calcular a corrente ou diferença de potencial em cada resistência e a carga ou diferença de potencial em cada condensador. Com essas grandezas podemos também determinar a potência que está a ser dissipada nas resistências e a energia armazenada nos condensadores. Para analisar os circuitos é conveniente usar duas regras gerais designadas de **leis de Kirchhoff**.

A primeira lei, a **lei dos nós**, ou lei das correntes, consiste em que em qualquer ponto de um circuito onde exista separação da corrente (nó), a diferença entre a soma das correntes que entram no ponto e a soma das correntes que saem é igual a zero. Por exemplo, no nó representado na figura 5.3, há uma corrente  $I_1$  a entrar no nó, e duas correntes  $I_2$  e  $I_3$  a sair. A lei das correntes implica:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (5.1)$$

Essa lei será válida sempre que as correntes sejam estacionárias; nomeadamente, quando a densidade da nuvem de cargas de condução permaneça constante dentro do condutor, sem existir acumulação de cargas em nenhum ponto; nesse caso, toda a carga que entra por um condutor, por unidade de tempo, deverá sair por outros condutores.

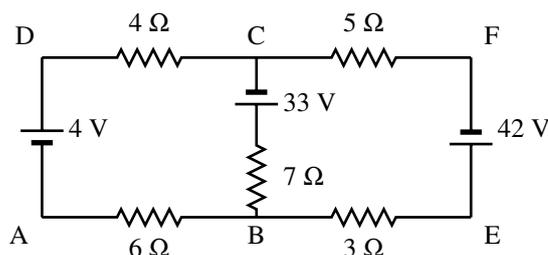


**Figura 5.3.:** Lei das correntes.

A segunda lei, designada de **lei das malhas**, ou lei das tensões, estabelece que a soma das diferenças de potencial, em qualquer caminho fechado (malha) num circuito, é sempre nula.

Por exemplo, no circuito da figura 5.4, podemos identificar 3 caminhos fechados (malhas): ABCDA, BEFCB e ABEFCDA. Por cada uma dessas malhas existe uma equação associada, obtida pela lei das malhas, mas unicamente duas dessas equações serão independentes. No caso da malha ABCDA, a lei das malhas é:

$$\Delta V_{AB} + \Delta V_{BC} + \Delta V_{CD} + \Delta V_{DA} = 0 \quad (5.2)$$



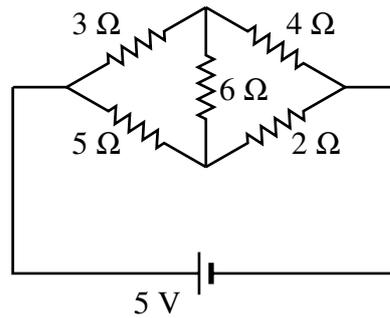
**Figura 5.4.:** Circuito com duas malhas.

É fácil conferir que o resultado é nulo, tendo em conta que  $\Delta V_{AB} = V_B - V_A$ ,  $\Delta V_{BC} = V_C - V_B$ ,  $\Delta V_{CD} = V_D - V_C$  e  $\Delta V_{DA} = V_A - V_D$ .

### 5.3. Método das malhas

Nos circuitos com várias resistências estudados no capítulo 3 foi sempre possível substituir as resistências por uma única resistência equivalente, permitindo assim calcular a corrente fornecida pela fonte e todas as outras correntes nas resistências.

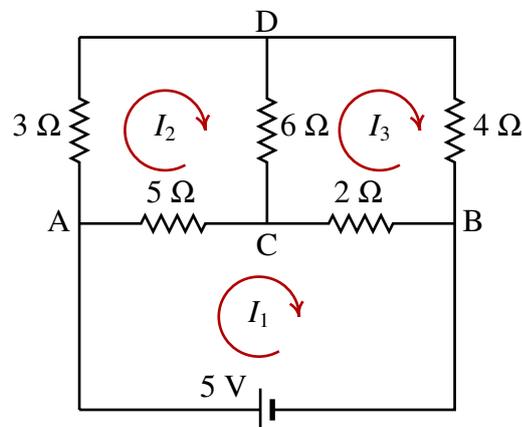
Nos casos em que existem várias fontes ou quando não é possível associar resistências, ou condensadores, em série e em paralelo até obter uma única resistência (ou condensador) equivalente, será útil usar o **método das malhas**. Por exemplo, no circuito da figura 5.5 nenhuma das resistências está nem em série nem em paralelo com nenhuma outra. Consequentemente, não é possível associar as resistências até obter uma única resistência equivalente.



**Figura 5.5.:** Circuito com cinco resistências em que nenhuma delas está em série ou em paralelo com outra.

Usaremos esse circuito da figura 5.5 para mostrar o fundamento do método das malhas. Na resolução de problemas não será preciso realizar a mesma análise que vamos fazer a seguir, mas bastará com aplicar as regras enunciadas no fim da seção, para escrever a matriz do circuito.

Começamos por identificar que existem 3 malhas no circuito e a cada malha atribuímos as **correntes de malha**  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , como se mostra na figura 5.6. Nessa figura, embora as malhas tenham sido desenhadas com forma retangular, continuam a ser equivalentes às malhas do circuito na figura 5.5. É conveniente escolher o mesmo sentido para todas as correntes de malha; no caso da figura 5.6, as três correntes foram definidas no sentido horário.



**Figura 5.6.:** Correntes de malhas no circuito da figura 5.5.

Nas resistências que se encontram entre duas malhas vizinhas, a corrente será a soma algébrica das correntes nas duas malhas. Por exemplo, na figura 5.6 a corrente que circula pela resistência entre de  $5\ \Omega$ , entre os pontos A e C, será  $I_1 - I_2$ , no sentido de A para C (ou  $I_2 - I_1$  no sentido oposto).

Com este método a regra dos nós é garantida em cada nó e basta aplicar a regra das malhas a cada uma das três malhas para calcular as três correntes. As diferenças de potencial nas

várias partes do circuito da figura 5.6, em função das correntes de malha, são as seguintes (unidades SI):

$$\Delta V_{AC} = -5(I_1 - I_2) \quad \Delta V_{CB} = -2(I_1 - I_3) \quad \Delta V_{BA} = 5 \quad (5.3)$$

$$\Delta V_{AD} = -3I_2 \quad \Delta V_{DC} = -6(I_2 - I_3) \quad \Delta V_{DB} = -4I_3 \quad (5.4)$$

substituindo esses valores, as três equações das malhas serão:

$$\Delta V_{AC} + \Delta V_{CB} + \Delta V_{BA} = -5I_1 + 5I_2 - 2I_1 + 2I_3 + 5 = 0 \quad (5.5)$$

$$\Delta V_{AD} + \Delta V_{DC} + \Delta V_{CA} = -3I_2 - 6I_2 + 6I_3 + 5I_1 - 5I_2 = 0 \quad (5.6)$$

$$\Delta V_{DB} + \Delta V_{BC} + \Delta V_{CD} = -4I_3 + 2I_1 - 2I_3 + 6I_2 - 6I_3 = 0 \quad (5.7)$$

Agrupando os termos que dependem de cada uma das correntes, podemos escrever o sistema de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 14 & -6 \\ -2 & -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

O sistema matricial 5.8 foi obtido calculando primeiro as diferenças de potencial nas secções do circuito e aplicando a regra das malhas. No entanto, observe que é possível escrever o sistema matricial imediatamente olhando para o circuito (figura 5.6) e usando as seguintes regras:

- Cada linha da matriz do circuito corresponde a uma das malhas.
- Na linha  $i$ , o número na coluna  $i$  será positivo e igual à soma de todas as resistências que houver na malha  $i$ .
- O número na linha  $i$  e coluna  $j$  (com  $i$  diferente de  $j$ ) será negativo e com valor absoluto igual à soma de todas as resistências que existirem no segmento de circuito que demarca a fronteira entre as malhas  $i$  e  $j$ .
- Cada linha  $i$  na matriz com uma coluna no lado direito da equação 5.8 é igual à soma algébrica de todas as  $fem$  que houver na malha  $i$ . Nessa soma algébrica, serão consideradas positivas todas as fontes em que o sentido arbitrado para a corrente passe do elétrodo negativo para o positivo (aumento de potencial) e negativas todas as fontes em que o sentido arbitrado para a corrente passe do elétrodo positivo para o negativo (diminuição de potencial).

Assim, a matriz do circuito será sempre simétrica, com os elementos na diagonal positivos e todos os restantes elementos negativos. No exemplo 5.1 as regras enunciadas acima serão usadas para escrever diretamente o sistema matricial de equações do circuito.

As 3 correntes de malha são a solução do sistema 5.8, que pode ser obtida usando algum

dos métodos para resolver sistemas lineares de equações, por exemplo, a regra de Cramer:

$$I_1 = \begin{vmatrix} 5 & -5 & -2 \\ 0 & 14 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 14 & -6 \\ -2 & -6 & 12 \end{vmatrix} = 1.473 \text{ A} \quad (5.9)$$

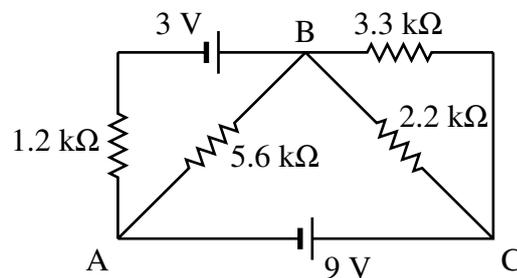
$$I_2 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 12 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 14 & -6 \\ -2 & -6 & 12 \end{vmatrix} = 0.804 \text{ A} \quad (5.10)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 5 \\ -5 & 14 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 14 & -6 \\ -2 & -6 & 12 \end{vmatrix} = 0.647 \text{ A} \quad (5.11)$$

Neste caso, todas as correntes obtidas são positivas, o que indica que o sentido das correntes de malha coincide com os sentidos que arbitramos na figura 5.6. Nos elementos do circuito que não estão entre duas malhas, a corrente real é igual à corrente da respectiva malha. Nomeadamente, a corrente que passa pela fonte é igual à corrente de malha  $I_1 = 1.473 \text{ mA}$ , a corrente na resistência de  $3 \Omega$  é igual a  $I_2 = 0.804 \text{ mA}$  e a corrente na resistência de  $4 \Omega$  é igual a  $I_3 = 0.647 \text{ mA}$  (ver figura 5.6). Nos elementos que estão na fronteira entre duas malhas será preciso combinar as correntes dessas duas malhas para obter a corrente real. Por exemplo, na resistência de  $5 \Omega$  passa a corrente de malha  $I_1 = 1.473 \text{ mA}$  para a direita e a corrente  $I_2 = 0.804 \text{ mA}$  para a esquerda; portanto, a corrente nessa resistência será para a direita e com intensidade  $I = 1.473 - 0.804 = 0.669 \text{ mA}$ .

### Exemplo 5.1

No circuito representado no diagrama, calcule: (a) A intensidade e sentido da corrente na resistência de  $5.6 \text{ k}\Omega$ . (b) A diferença de potencial na resistência de  $3.3 \text{ k}\Omega$ . (c) A potência fornecida ou dissipada por cada uma das fontes.

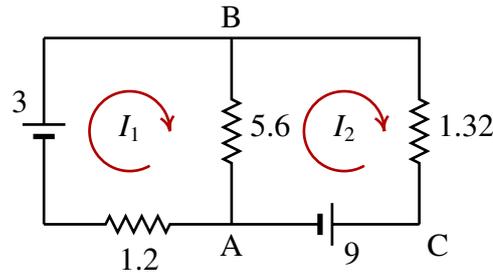


**Resolução.** O primeiro que fazemos é escolher um sistema consistente de unidades, para podermos trabalhar com números, sem ter que escrever unidades em cada equação. Usaremos todos os valores das resistências em quilo-ohms e a diferença de potencial em volts, de forma que as correntes estarão em unidades de miliampere.

O circuito tem 3 malhas; no entanto, podemos reduzir o número de malhas para 2, devido a que as resistências de  $2.2\text{ k}\Omega$  e  $3.3\text{ k}\Omega$  estão em paralelo, podendo ser substituídas por uma única resistência:

$$2.2 \parallel 3.3 = \frac{2.2 \times 3.3}{2.2 + 3.3} = 1.32$$

O circuito equivalente obtido, com duas correntes de malha, é o seguinte:



**Figura 5.7.:** Circuito equivalente para o exemplo 5.1.

O sistema matricial correspondente a esse circuito é:

$$\begin{bmatrix} 6.8 & -5.6 \\ -5.6 & 6.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Usando o *Maxima*, a solução do sistema é:

```
(%i1) float(solve([6.8*I1 - 5.6*I2 = 3, -5.6*I1 + 6.92*I2 = -9]));
(%o1) [[I2 = - 2.829, I1 = - 1.888]]
```

os sinais negativos das duas correntes indicam que são no sentido oposto ao sentido que foi arbitrado no diagrama.

(a) Na resistência de  $5.6\text{ k}\Omega$  passa a corrente de malha  $1.888$ , no sentido de A para B, e a corrente de malha  $2.829$ , no sentido de B para A. Consequentemente, a corrente nessa resistência é  $2.829 - 1.888 = 0.941\text{ mA}$ , de B para A.

(b) A corrente na resistência de  $1.32\text{ k}\Omega$  é igual à segunda corrente de malha,  $2.829\text{ mA}$ , de C para B. Portanto, a diferença de potencial entre C e B, que é também a diferença de potencial na resistência de  $3.3\text{ k}\Omega$ , é  $1.32 \times 2.829 = 3.73\text{ V}$  (maior potencial em C do que em B).

(c) A corrente que passa pela fonte de  $3\text{ V}$  é igual à primeira corrente de malha,  $1.888\text{ mA}$ ; como essa corrente passa do eletrodo positivo para o negativo, a fonte de  $3\text{ V}$  dissipa uma potência de  $1.888 \times 3 = 5.664\text{ mW}$ . Na fonte de  $9\text{ V}$ , a corrente é igual à segunda corrente de malha,  $2.829\text{ mA}$ ; como essa corrente passa do eletrodo negativo para o positivo, a fonte fornece uma potência de  $2.829 \times 9 = 25.46\text{ mW}$ .

## 5.4. Princípio de sobreposição

No exemplo 5.1, se as correntes de malha  $I_1$  e  $I_2$  forem decompostas em duas partes,  $I_1 = i_1 + j_1$  e  $I_2 = i_2 + j_2$ , a equação 5.12 poderá ser escrita assim:

$$\begin{bmatrix} 6.8 & -5.6 \\ -5.6 & 6.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6.8 & -5.6 \\ -5.6 & 6.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Assim, se as correntes  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $j_1$  e  $j_2$  fossem soluções dos dois sistemas seguintes:

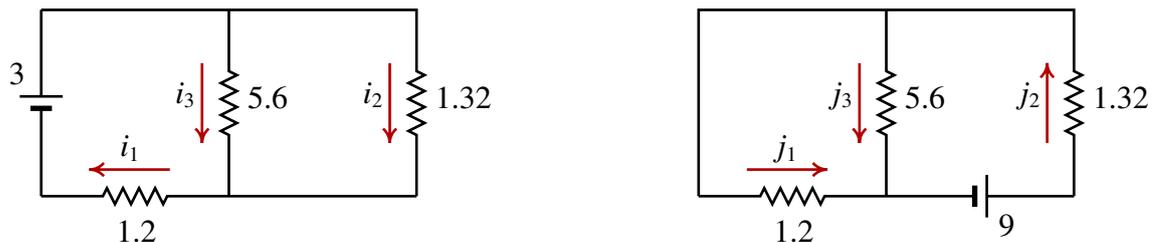
$$\begin{bmatrix} 6.8 & -5.6 \\ -5.6 & 6.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6.8 & -5.6 \\ -5.6 & 6.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

ficaria garantido que  $I_1$  e  $I_2$  seriam as soluções da equação 5.12. Os dois sistemas na equação 5.14 correspondem a dois circuitos mais simples do que o circuito original na figura 5.7, em que em cada um dos dois novos circuitos uma das fontes foi substituída por um fio com resistência nula. Esses dois novos circuitos são tão simples, que podem ser resolvidos sem ser preciso resolver sistemas de equações, como veremos no exemplo seguinte.

### Exemplo 5.2

Resolva novamente o exemplo 5.1, usando o princípio de sobreposição.

**Resolução.** Os dois circuitos obtidos, colocando cada uma das fontes em curto-circuito, são os seguintes:



Em cada circuito foram indicadas as correntes nas resistências, que estarão em unidades de mA. Observe que essas já são as correntes reais, e não as correntes de malha. No circuito do lado esquerdo, a resistência total é:

$$5.6 \parallel 1.32 + 1.2 = 1.0682 + 1.2 = 2.2682$$

e, portanto a corrente  $i_1$  será:

$$i_1 = \frac{3}{2.2682} = 1.323$$

A diferença de potencial em  $5.6 \parallel 1.32$  será  $1.0682 i_1$  e as outras duas correntes serão:

$$i_2 = \frac{1.0682 \times 1.323}{1.32} = 1.07 \quad i_3 = \frac{1.0682 \times 1.323}{5.6} = 0.252$$

No circuito do lado direito, a resistência total é:

$$5.6 \parallel 1.2 + 1.32 = 0.9882 + 1.32 = 2.3082$$

e, portanto a corrente  $j_2$  será:

$$j_2 = \frac{9}{2.3082} = 3.899$$

A diferença de potencial em  $5.6 \parallel 1.2$  será  $0.9882 j_2$  e as outras duas correntes serão:

$$j_1 = \frac{0.9882 \times 3.899}{1.2} = 3.21 \quad j_3 = \frac{0.9882 \times 3.899}{5.6} = 0.688$$

Usando esses resultados e olhando para os dois diagramas de circuito, podemos calcular:

$$\begin{aligned} I_1 &= j_1 - i_1 = 3.21 - 1.323 = 1.89 \text{ mA} && \text{(para a direita)} \\ I_2 &= j_2 - i_2 = 3.899 - 1.07 = 2.83 \text{ mA} && \text{(para cima)} \\ I_3 &= i_3 + j_3 = 0.252 + 0.688 = 0.94 \text{ mA} && \text{(para baixo)} \end{aligned}$$

que são os mesmos resultados obtidos usando o método das malhas e, assim, o resto da resolução é igual.

---

## 5.5. Circuitos com condensadores

A diferença de potencial num condensador é diretamente proporcional à carga armazenada nas suas armaduras. Se ligarmos um condensador, inicialmente sem carga, entre dois pontos num circuito, a sua diferença de potencial inicial será nula; portanto, nesse instante é como se tivéssemos feito um curto circuito entre os dois pontos com um fio de resistência nula. Nos instantes seguintes a diferença de potencial aumentará, à medida que entra carga no condensador; como a diferença de potencial no condensador não pode aumentar indefinidamente, a carga e a tensão atingirão valores finais constantes.

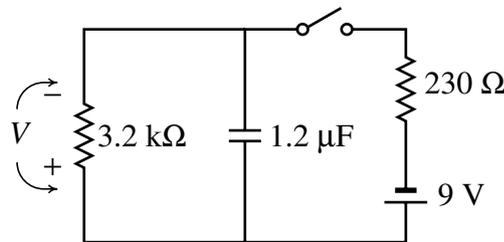
Quando a carga e a tensão no condensador alcançarem os seus valores finais, a corrente no condensador será nula e, portanto, o condensador poderá ser considerado como um interruptor aberto que não deixa passar corrente. O aumento da carga até o seu valor final, enquanto a corrente diminui desde o seu valor inicial até zero, constitui a **resposta transitória** à alteração produzida quando foi ligada a fonte.

A resposta transitória será estudada no capítulo sobre processamento de sinais. Neste capítulo consideraremos unicamente os valores iniciais e finais das grandezas elétricas nos circuitos de corrente contínua. No instante inicial  $t = 0$ , todos os condensadores podem ser substituídos por fios com resistência nula e para calcular os valores finais podemos substituir todos os condensadores por interruptores abertos. O tempo necessário para que as cargas atinjam os seus valores finais costuma ser muito curto.

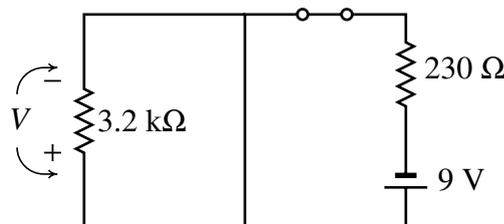
### Exemplo 5.3

Uma pilha com fem de 9 V e resistência interna de  $230 \Omega$  liga-se em paralelo a um condensador de  $1.2 \mu\text{F}$  e a um voltímetro com resistência interna de  $3.2 \text{ k}\Omega$ . (a) Calcule as correntes inicial e final na pilha. (b) Calcule a carga final do condensador.

**Resolução.** O diagrama do circuito é o seguinte:



(a) No instante inicial, o interruptor acabou de ser fechado e o condensador pode ser substituído por um fio com resistência nula:

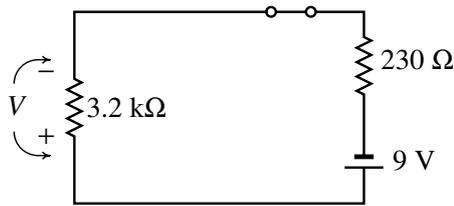


Repare que toda a corrente que sai da fonte passará por esse fio e nenhuma corrente circulará pelo voltímetro. Outra possível interpretação é que a resistência equivalente do fio de resistência nula em paralelo com o voltímetro é nula ( $3.2 \parallel 0 = 0$ ), e portanto, podemos ignorar o voltímetro nesse instante inicial. Assim, a corrente no instante inicial será:

```
(%i2) I0: float(9/230);
(%o2) .03913
```

em unidades SI (ampere).

Quando o condensador estiver completamente carregado, o circuito equivalente será o seguinte:



e a corrente final será:

```
(%i3) I: float(9/(3200 + 230));
(%o3) .002624
```

(b) Como o condensador está ligado em paralelo com o voltímetro, a sua diferença de potencial final será igual à diferença de potencial final na resistência de 3.2 kΩ, que é igual a:

```
(%i4) DV: 3200*I;
(%o4) 8.397
```

e, portanto, a carga final do condensador será:

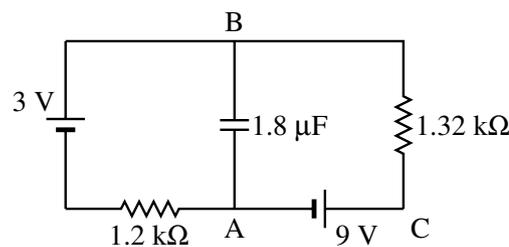
```
(%i5) Q: 1.2e-6*DV;
(%o5) 1.0076e-5
```

nomeadamente,  $Q = 10.076 \mu\text{C}$ . É de salientar que os resultados dos comandos do Maxima mostram apenas 4 algarismos significativos, porque previamente alteramos para 4 o valor predefinido da variável `fpprintprec`, mas internamente está a ser usada uma precisão maior nos cálculos e nos valores armazenados nas variáveis.

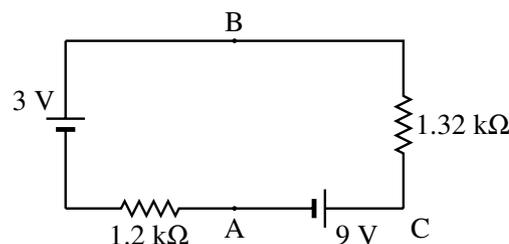
#### Exemplo 5.4

No circuito do exemplo 5.1, se a resistência de 5.6 kΩ for substituída por um condensador de 1.8 μF, qual será a carga final desse condensador e com que polaridade?

**Resolução.** O diagrama do circuito é o seguinte:



Após a carga alcançar o valor final, o circuito equivalente será:



Assim, o circuito é também equivalente a uma única fonte de 6 V, ligada a uma resistência de 2.52 k $\Omega$ . Se preferir, pode escrever a equação para a malha do circuito acima; arbitrando corrente no sentido horário, a equação da malha é:

$$2520I = 3 - 9 \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{6}{2520}$$

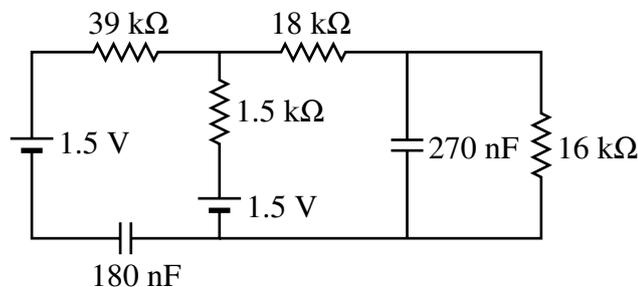
O sinal negativo indica que a corrente circula em sentido anti-horário. Esse valor da intensidade da corrente permite-nos calcular a diferença de potencial no condensador (igual à diferença de potencial entre os pontos A e B) e a carga:

```
(%i6) I: float(6/2520);
(%o6) .002381
(%i7) DV: 9 - 1320*I;
(%o7) 5.857
(%i8) Q: 1.8e-6*DV;
(%o8) 1.0543e-5
```

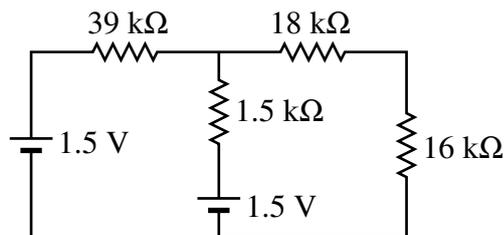
Assim, a carga final do condensador é 10.543  $\mu\text{C}$  e a polaridade é positiva na armadura ligada ao ponto B e negativa na armadura ligada ao ponto A (o cálculo de DV com o comando %i7 foi feito admitindo o potencial de B maior do que o potencial de A).

### Exemplo 5.5

No circuito representado no diagrama, calcule a potência dissipada por cada resistência e a energia armazenada em cada condensador.



**Resolução.** Como o enunciado não diz quando foram ligadas as fontes, admitiremos que o circuito tem estado ligado um tempo suficiente para que as correntes e cargas já tenham os valores finais. O circuito equivalente é:



Na resistência de 39 k $\Omega$  a corrente é nula e o circuito tem apenas uma malha, com resistência total  $1.5 + 18 + 16 = 35.5$  k $\Omega$  e corrente:

```
(%i9) I: 1.5/35.5e3;
(%o9)                                4.2254e-5
```

Com essa corrente podemos calcular todas as potências dissipadas e energias armazenadas.

- Resistência de 39 k $\Omega$ .  $P = 0$ , já que a corrente é nula.

- Resistência de 18 k $\Omega$

```
(%i10) P18: 18e3*I^2;
(%o10)                                3.2136e-5
```

$$P = 32.136 \mu\text{W}$$

- Resistência de 16 k $\Omega$

```
(%i11) P16: 16e3*I^2;
(%o11)                                2.8566e-5
```

$$P = 28.566 \mu\text{W}$$

- Resistência de 1.5 k $\Omega$

```
(%i12) P1_5: 1.5e3*I^2;
(%o12)                                2.678e-6
```

$$P = 2.678 \mu\text{W}$$

- Condensador de 270 nF. Terá a mesma diferença de potencial que a resistência de 16 k $\Omega$ :

```
(%i13) DV: 16e3*I;
(%o13)                                .6761
(%i14) U270: 270e-9*DV^2/2;
(%o14)                                6.1702e-8
```

$$U_e = 61.702 \text{ nJ}$$

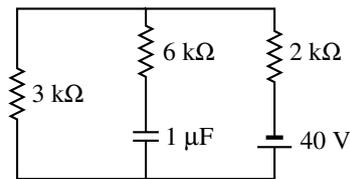
- Condensador de 180 nF. Um possível percurso entre os dois pontos onde está ligado passa pela fonte do lado esquerdo, pela resistência de 39 k $\Omega$  (com diferença de potencial nula), pela resistência de 1.5 k $\Omega$  e pela segunda fonte; conseqüentemente,

```
(%i15) DV: 1.5 + 1.5e3*I - 1.5;
(%o15)                                .06338
(%i16) U180: 180e-9*DV^2/2;
(%o16)                                3.615e-10
```

$$U_e = 0.3615 \text{ nJ}$$

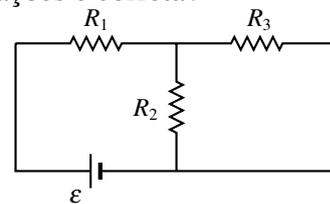
## Perguntas

- Qual dos seguintes princípios físicos está relacionado com a lei dos nós?
  - Conservação da energia.
  - Quantização da carga.
  - Conservação da carga.
  - Conservação da quantidade de movimento.
  - Ação e reação.
- Num condensador dentro de um circuito de corrente contínua, qual das seguintes grandezas terá sempre um valor final nulo?
  - A carga.
  - A diferença de potencial.
  - A corrente.
  - A capacidade.
  - A energia armazenada.
- Uma fonte de tensão constante foi ligada a um condensador e 3 resistências, como mostra o diagrama. Qual será a intensidade da corrente final fornecida pela fonte?



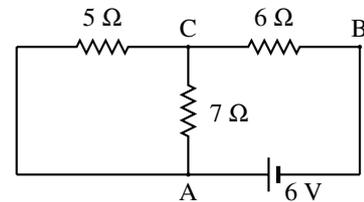
- 5 mA
- 8 mA
- 10 mA
- 20 mA
- 0

- Se  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são os valores absolutos das correntes que circulam pelas resistências  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  no circuito da figura, qual das equações é correta?



- $I_1 + I_2 = I_3$
- $I_1 + I_3 = I_2$
- $I_2 + I_3 = I_1$
- $I_1 = I_2$
- $I_2 = I_3$

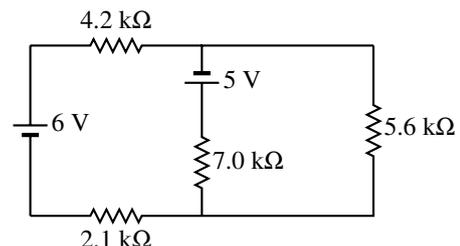
- Qual das afirmações seguintes, sobre o potencial nos pontos A, B e C, é correta?



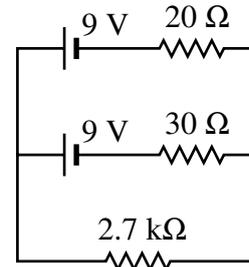
- $V_C > V_B > V_A$
- $V_C > V_A > V_B$
- $V_A > V_B > V_C$
- $V_A > V_C > V_B$
- $V_B > V_A > V_C$

## Problemas

- No circuito da figura, determine quais das fontes de força eletromotriz fornecem ou absorvem energia, e calcule a potência fornecida, ou absorvida, por cada uma.

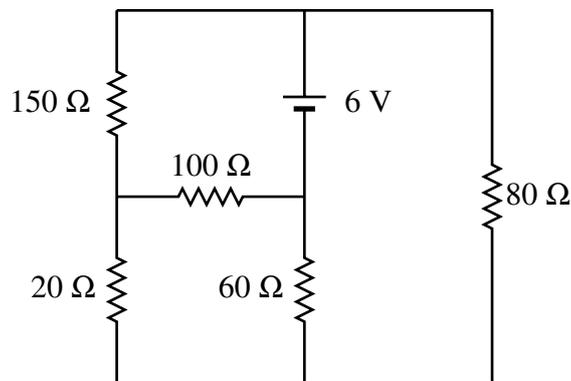


2. Duas pilhas iguais, de 9 V, têm sido usadas em forma diferente e, por isso, uma delas está mais gasta. As duas pilhas ligam-se em paralelo a uma resistência de  $2.7 \text{ k}\Omega$ , como mostra o diagrama. (a) Qual das duas pilhas é a que está mais gasta? (b) Qual das duas pilhas fornece maior potência no circuito? (c) Calcule a corrente na resistência de  $2.7 \text{ k}\Omega$ .

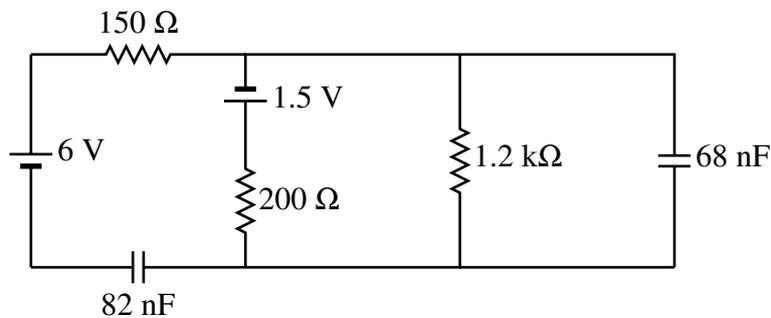


3. Se as duas pilhas do problema anterior fossem ligadas em série, em vez de em paralelo, qual delas forneceria maior potência no circuito? Que inconveniente poderá existir do ponto de vista prático?

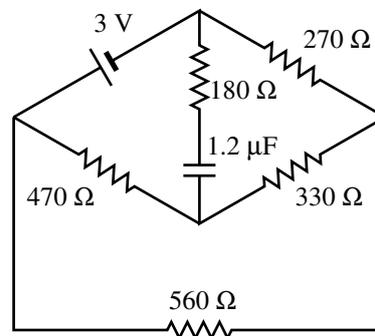
4. Calcule a potência dissipada em cada resistência no circuito e a potência fornecida pela fem. Confira que a potência fornecida pela fem é igual à soma das potências dissipadas em todas as resistências.



5. No circuito representado no diagrama, calcule: (a) As correntes iniciais nas resistências e condensadores. (b) As cargas finais nos condensadores, indicando as suas polaridades.

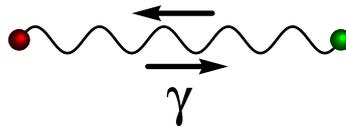


6. (a) Calcule a intensidade e sentido da corrente inicial no condensador. (b) Calcule a carga final do condensador e indique a polaridade.



7. No problema 4, se a resistência de  $100 \Omega$  for substituída por um condensador de  $39 \text{ nF}$ , calcule a energia final armazenada nesse condensador.

## 6. Campo elétrico



A explicação da força entre partículas através da existência de um campo vem desde a época em que foi desenvolvida a teoria da gravitação universal. A dificuldade em aceitar que uma partícula possa afetar outra partícula distante, sem existir nenhum contato entre elas, foi ultrapassada na física clássica com o conceito do campo de força. No caso da força eletrostática, o campo mediador que transmite a força eletrostática foi designado por éter; a luz seria uma onda que se propaga nesse éter lumínico. No século XIX foram realizadas inúmeras experiências para detectar a presença do éter, sem nenhum sucesso. No fim do século chegou-se à conclusão de que não existe tal éter. No entanto, o campo elétrico tem existência física, no sentido de que transporta energia e que pode subsistir até após desaparecerem as cargas que o produzem. Na física quântica a interação elétrica é explicada como uma troca de partículas mediadoras da força, que são as mesmas partículas da luz, os fótons. Cada carga lança alguns fótons que são absorvidos pela outra carga; no entanto, neste capítulo falaremos sobre a teoria clássica do campo, onde o campo é como um fluido invisível que arrasta as cargas elétricas.

## 6.1. Campo elétrico produzido por cargas pontuais

O campo elétrico produzido por uma carga pontual já foi estudado no capítulo 1. A figura 1.5 mostra o campo repulsivo produzido por uma carga positiva.

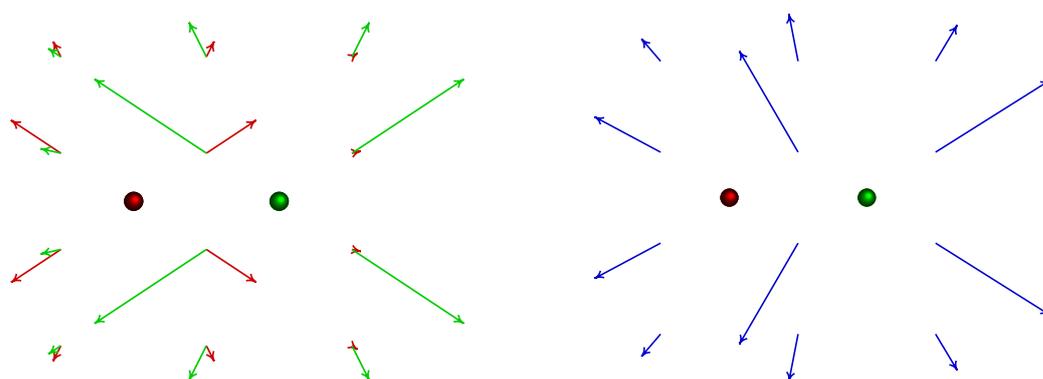
A equação 1.5 para o módulo do campo produzido por uma carga pontual pode ser escrita de forma vetorial. Se a carga  $Q$  estiver na origem, o resultado obtido é:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2} \vec{e}_r \quad (6.1)$$

sendo  $r$  a distância até a origem, e  $\vec{e}_r$  o vetor unitário que aponta na direção radial, afastando-se da carga. Se a carga for negativa, a equação anterior continua válida, dando um vetor que aponta no sentido oposto de  $\vec{e}_r$  (campo atrativo). O vetor unitário  $\vec{e}_r$  calcula-se dividindo o vetor posição  $\vec{r}$  pelo seu módulo,  $r$ . Se a carga não estiver na origem mas numa posição  $\vec{r}_1$ , a equação 6.1 pode ser generalizada facilmente, dando o resultado:

$$\vec{E} = \frac{kQ(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (6.2)$$

O campo produzido por um sistema de cargas pontuais obtém-se somando vetorialmente os campos produzidos por cada uma das cargas. Por exemplo o lado esquerdo na figura 6.1 mostra os campos produzidos por duas cargas pontuais de 4 nC e 9 nC em alguns pontos. O lado direito mostra o campo resultante, obtido somando vetorialmente os dois campos.



**Figura 6.1.:** Campos produzidos por duas cargas de 4 nC e 9 nC em alguns pontos (lado esquerdo) e o campo resultante nesses pontos (lado direito).

A equação 6.2 pode ser generalizada para um sistema de  $n$  cargas pontuais. Vamos escrever a equação explicitamente, em função das coordenadas cartesianas no plano  $xy$  (a generalização para o espaço  $xyz$  será evidente). Se as cargas  $q_1, q_2, \dots, q_n$  estiverem nos pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , o resultado é:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{k q_i (x - x_i)}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{3/2}} \right] \vec{e}_x + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{k q_i (y - y_i)}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{3/2}} \right] \vec{e}_y \quad (6.3)$$

**Exemplo 6.1**

Desenhe, no plano  $xy$ , as linhas do campo elétrico produzido por duas cargas de 4 nC e 9 nC afastadas 1 cm entre si.

**Resolução.** Primeiro fixamos um sistema de unidades; as cargas serão medidas em nC e as distâncias em cm. Com essas unidades o valor da constante de coulomb é:

$$k = 90 \frac{\mu\text{N} \cdot \text{cm}^2}{\text{nC}^2}$$

conseqüentemente, se usarmos o valor  $k = 90$  as unidades do campo serão  $\mu\text{N}/\text{nC}$ . Arbitrando que a carga de 4 nC está na origem e a carga de 9 nC no ponto (1, 0) e substituindo na equação 6.3 obtemos:

$$E_x = \frac{360x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{810(x-1)}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} \quad E_y = \frac{360y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{810y}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}}$$

O campo já foi mostrado em alguns pontos na figura 6.1. Para desenhar as linhas de campo elétrico, usaremos o programa `plotdf` do *Maxima*:

```
(%i1) Ex: 90*4*x/(x^2+y^2)^(3/2)+90*9*(x-1)/((x-1)^2+y^2)^(3/2);
```

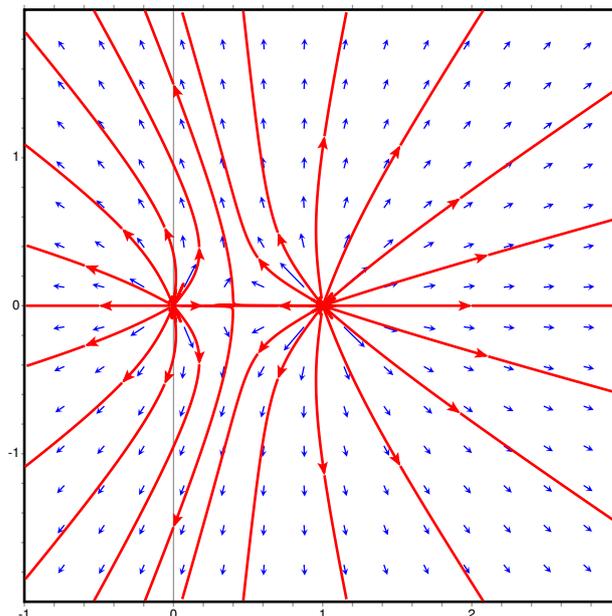
```
(%o1)
      360 x          810 (x - 1)
----- + -----
      2      2 3/2      2      2 3/2
      (y  + x )      (y  + (x - 1) )
```

```
(%i2) Ey: 90*4*y/(x^2+y^2)^(3/2)+90*9*y/((x-1)^2+y^2)^(3/2);
```

```
(%o2)
      360 y          810 y
----- + -----
      2      2 3/2      2      2 3/2
      (y  + x )      (y  + (x - 1) )
```

```
(%i3) plotdf([Ex,Ey],[x,-1,3],[y,-2,2]);
```

O resultado obtido, após desenhar algumas linhas de campo, aparece na figura 6.2. Observe que a expressão obtida para o  $E_y$  será igual a zero em qualquer ponto do eixo dos  $x$  ( $y = 0$ ), excluindo os pontos onde estão as cargas. Igualando  $y = 0$  e  $E_x = 0$  obtemos o ponto de campo nulo  $x = 1/3$  e  $y = 0$ , que é um ponto de sela como podemos conferir na figura 6.2. Os pontos onde estão as duas cargas positivas são nós repulsivos.



**Figura 6.2.:** Campo elétrico de duas cargas pontuais de 4 nC e 9 nC colocadas na origem, e no ponto (1, 0).

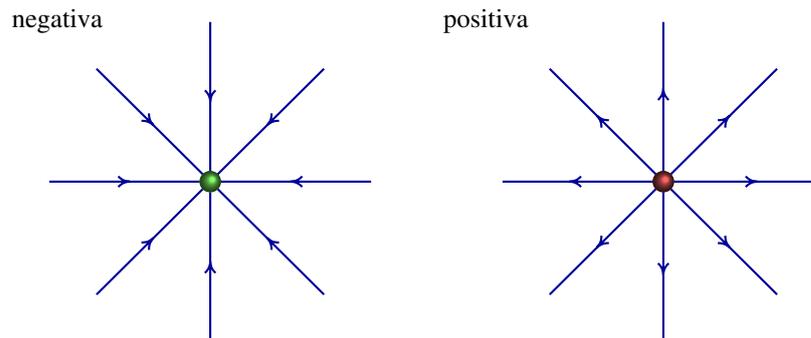
## 6.2. Propriedades das linhas de campo elétrico

O campo elétrico pode ser representado por vetores que indicam o valor do campo em vários pontos do espaço, como foi feito na figura 6.1. O problema com essa representação é que o campo varia rapidamente com a distância, o que faz com que o vetor seja muito grande em alguns pontos e muito pequeno em outros pontos.

A representação usando linhas de campo é mais conveniente. As linhas de campo seguem a direção do campo. Em cada ponto numa dessas curvas, o campo é tangente à curva e no sentido indicado pelas setas.

As linhas de campo elétrico têm várias propriedades

- Perto de uma carga pontual positiva há linhas a sair em todas as direções e perto de uma carga negativa há linhas a entrarem em todas as direções (ver figura 6.3).
- Duas linhas de campo nunca se podem cruzar; no ponto de cruzamento o campo teria duas direções diferentes, que não é possível.
- No próximo capítulo demonstraremos que a matriz jacobiana correspondente ao campo elétrico é sempre simétrica. Isso implica que os valores próprios dessa matriz serão sempre reais e nunca complexos. Assim, os únicos pontos de equilíbrio que podem existir num campo elétrico são nós e pontos de sela. Um nó pode ser atrativo ou repulsivo. Se for atrativo, será um ponto onde existe uma carga pontual negativa; se for repulsivo, será um ponto onde existe uma carga pontual positiva. Os pontos de sela são pontos onde o campo é nulo, mas não existe nenhuma carga nesse ponto.



**Figura 6.3.:** Linhas de campo elétrico perto de uma carga negativa (esquerda) e de uma carga positiva (direita).

No exemplo apresentado na figura 6.2, existe um ponto de sela em  $(0.4, 0)$ , onde o campo é nulo. Existem duas linhas de campo que terminam nesse ponto de sela, e duas linhas de campo que começam nesse ponto.

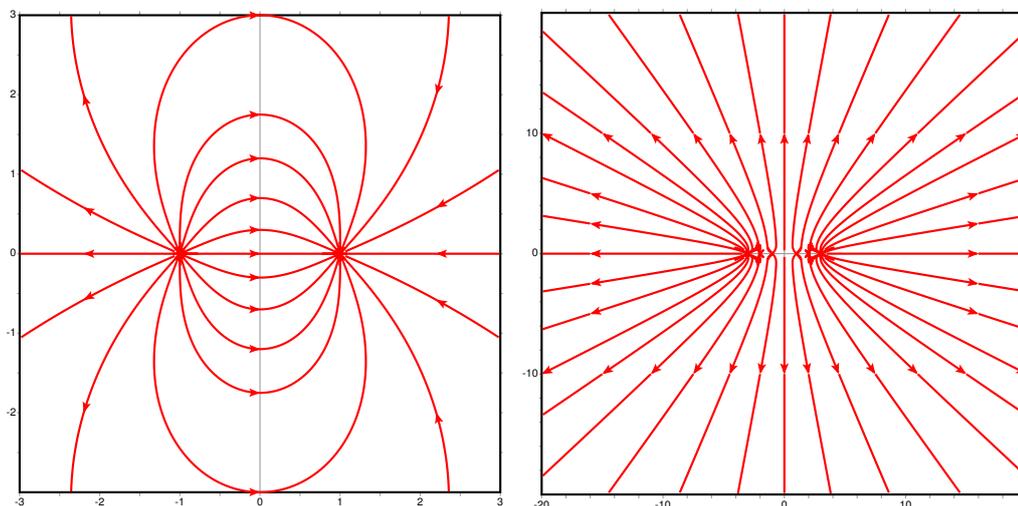
Outro exemplo são as linhas de campo de um **dipolo elétrico**, formado por duas cargas iguais mas de sinais opostos. Se admitirmos que as duas cargas estão localizadas nos pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ , o campo desenha-se com os seguintes comandos:

```
(%i4) Ex: (x+1)/((x+1)^2+y^2)^(3/2)-(x-1)/((x-1)^2+y^2)^(3/2) $
```

```
(%i5) Ey: y/((x+1)^2+y^2)^(3/2)-y/((x-1)^2+y^2)^(3/2) $
```

```
(%i6) plotdf([Ex, Ey], [x, -3, 3], [y, -3, 3]);
```

O resultado aparece no lado esquerdo da figura 6.4.



**Figura 6.4.:** Campo elétrico criado por um dipolo (esquerda) e por um sistema de 7 cargas no segmento de reta entre  $x = -3$  e  $x = 3$ .

Uma distribuição contínua de cargas pode ser aproximada por uma série de cargas pontuais. Por exemplo, se existirem cargas distribuídas uniformemente no segmento do eixo dos  $x$

entre  $x = -3$  e  $x = 3$ , podemos admitir um sistema de cargas pontuais, equidistantes, sobre o segmento entre  $x = -3$  e  $x = 3$ . Com 7 cargas pontuais, os comandos de Maxima para desenhar o campo são:

```
(%i7) Ex: sum((x-i)/((x-i)^2+y^2)^(3/2), i, -3, 3) $
(%i8) Ey: sum(y/((x-i)^2+y^2)^(3/2), i, -3, 3) $
(%i9) plotdf([Ex, Ey], [x, -20, 20], [y, -20, 20]);
```

O gráfico obtido é apresentado no lado direito da figura 6.4.

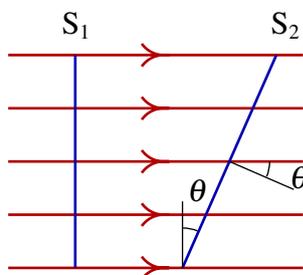
### 6.3. Fluxo elétrico

Para calcular o campo elétrico produzido por um objeto com carga, teríamos que somar os campos produzidos por todas as partículas com carga no objeto. Esse cálculo pode ser bastante complexo, inclusive se dividirmos o objeto em alguns pedaços que são considerados como cargas pontuais. Nos sistemas em que existe alguma simetria, é mais fácil calcular o campo usando a **lei de Gauss**. Para enunciar a lei de Gauss, precisamos primeiro definir o conceito de fluxo elétrico.

O **fluxo**  $\Phi_e$  de um campo elétrico uniforme, através de um plano com área  $A$ , define-se como o produto da componente perpendicular do campo, vezes a área da superfície:

$$\Phi_e = A E \cos \theta \quad (6.4)$$

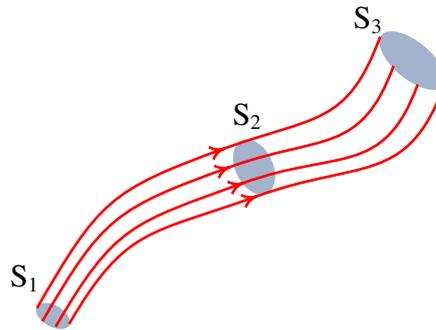
onde  $\theta$  é ângulo entre o campo e a perpendicular ao plano (ver figura 6.5).



**Figura 6.5.:** Fluxo elétrico através de dois planos  $S_1$  e  $S_2$  (vistos de lado).

O fluxo através de dois planos atravessados pelas mesmas linhas de campo elétrico é o mesmo. Por exemplo, na figura 6.5 o fluxo através dos planos  $S_1$  e  $S_2$  é o mesmo. No plano  $S_1$ , como o campo é perpendicular, o fluxo é igual a  $A_1 E$ ; no plano  $S_2$  o fluxo é  $A_2 E \cos \theta$ ; os dois fluxos são iguais, já que  $A_2 \cos \theta = A_1$ .

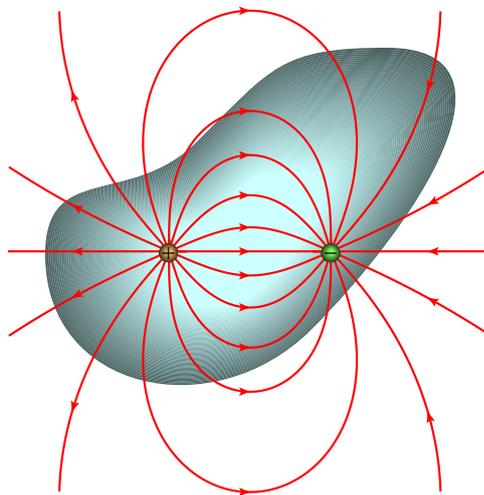
No caso de campos não uniformes e superfícies curvas, a superfície é aproximada por pequenos planos e em cada plano admite-se que o campo é uniforme; o fluxo na superfície completa é igual à soma dos fluxos em todos os pequenos planos. A aproximação será exata no limite em que a superfície for aproximada por um número infinito de planos; nesse limite a soma dos fluxos constitui um integral de superfície.



**Figura 6.6.:** Tubo de fluxo.

Em geral, inclusivamente para campos não uniformes, nas superfícies onde passem o mesmo número de linhas de campo o fluxo elétrico será o mesmo. As linhas de campo que passam pela fronteira de uma superfície formam um **tubo de fluxo**. A figura 6.6 mostra um desses tubos de fluxo.

Em qualquer superfície delimitada pelo tubo de fluxo, o fluxo terá o mesmo valor. Por exemplo, na figura 6.6 o fluxo através das superfícies  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  tem o mesmo valor. Nenhuma linha de campo pode atravessar para dentro ou para fora do tubo, porque as linhas não se podem cruzar; assim, o número de linhas que atravessa qualquer das superfícies delimitadas pelo tubo de fluxo é o mesmo. O fluxo elétrico através de uma superfície é proporcional ao número de linhas de campo que atravessam a superfície.



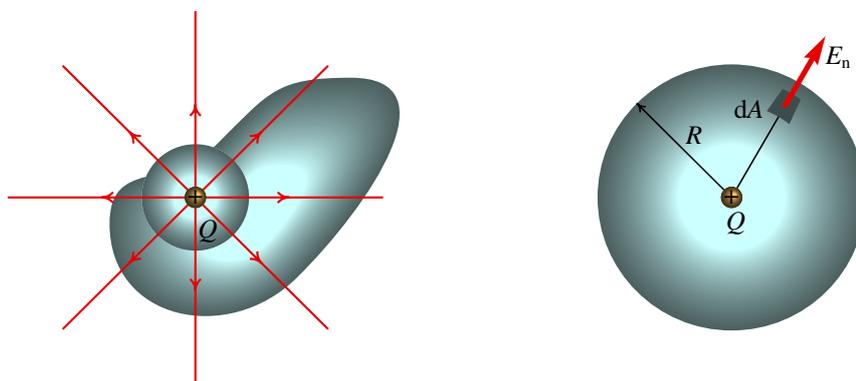
**Figura 6.7.:** Num dipolo elétrico, o fluxo através de uma superfície fechada, com o dipolo no seu interior, é nulo.

Se houver linhas de campo a atravessar nos dois sentidos da superfície, as linhas que atravessam num sentido produzem fluxo positivo e as opostas produzem fluxo negativo. O sentido positivo é escolhido de forma arbitrária. No caso de uma superfície fechada,

admite-se que o campo que aponta para fora da superfície produz fluxo positivo, e o campo que aponta para dentro da superfície produz fluxo negativo.

Por exemplo, o fluxo produzido por um dipolo elétrico, através de uma superfície fechada que envolva as duas cargas, é nulo porque o número de linhas de campo que entram e saem é o mesmo (figura 6.7).

O fluxo através de uma superfície fechada à volta de uma carga pontual  $Q$ , é igual ao fluxo numa esfera com centro na carga, já que todas as linhas de campo que passam através da superfície passam também através da esfera. Nessa esfera, com raio  $R$ , o campo é perpendicular e com módulo constante,  $E_n = kQ/R^2$ , em toda a superfície (figura 6.8).



**Figura 6.8.:** Fluxo produzido por uma carga pontual através de uma superfície fechada.

Assim, o fluxo será igual ao produto da área da esfera vezes o módulo do campo:

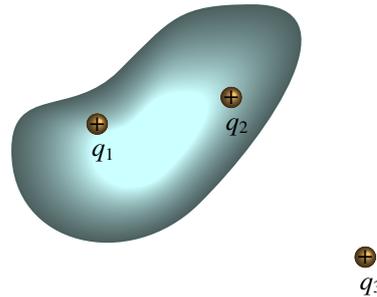
$$\Phi_e = 4\pi R^2 \left( \frac{kQ}{R^2} \right) = 4\pi kQ \quad (6.5)$$

Se  $Q$  estiver fora da superfície fechada, o fluxo será nulo, pois qualquer linha de campo que entra por uma parte da superfície, sai por outra parte. O número total de linhas que entram é igual a o número total de linhas que saem.

## 6.4. Lei de Gauss

O fluxo elétrico produzido por várias cargas pontuais, através de uma superfície fechada, é igual à soma dos fluxos produzidos por cada uma das cargas. Como vimos na seção anterior, o fluxo das cargas pontuais que estejam fora da superfície fechada será nulo, e o fluxo das cargas que estejam dentro da superfície será  $4\pi k$  vezes o valor da carga. Por exemplo, no caso da figura 6.9, unicamente as duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  produzem fluxo, porque a carga  $q_3$  encontra-se fora da superfície. O fluxo total é:

$$\Phi_e = 4\pi k(q_1 + q_2) \quad (6.6)$$



**Figura 6.9.:** O fluxo elétrico através da superfície fechada depende unicamente da carga interna, neste caso  $q_1 + q_2$ .

O resultado do exemplo da figura 6.9 pode ser generalizado para qualquer sistema de cargas e qualquer superfície fechada, e é designado de **Lei de Gauss**:

*O fluxo através de qualquer superfície fechada é igual à carga total no interior da superfície, multiplicada por  $4\pi k$ .*

Em termos matemáticos, a lei de Gauss determina que o fluxo elétrico através de qualquer superfície fechada é:

$$\Phi_e = 4\pi k q_{\text{int}} \quad (6.7)$$

Se a carga total no interior for positiva, o fluxo será positivo, indicando que há linhas de campo a saírem da superfície. Se a carga interna total for negativa, o fluxo é negativo porque há linhas de campo a entrar na superfície.

O fluxo elétrico total à volta de uma carga pontual é diretamente proporcional à carga. Em alguns casos é possível desenhar um número de linhas de campo proporcional à carga, para dar uma ideia mais aproximada do valor do fluxo em diferentes regiões; por exemplo, na figura 6.2 foram desenhadas 8 linhas de campo a saírem da carga de 4 nC, e 18 linhas a saírem da carga de 9 nC.

A lei de Gauss é muito útil para calcular campos elétricos de sistemas com simetria, como veremos nas seções seguintes.

### Exemplo 6.2

*Um eletrão encontra-se no centro de um cubo cuja aresta mede 20 nm. Calcule o fluxo elétrico através de uma das faces do cubo.*

**Resolução.** O cubo é uma superfície fechada (embora não seja superfície gaussiana neste caso) e portanto o fluxo através do cubo pode ser calculado facilmente usando a lei de Gauss:

$$\Phi_e = 4\pi k q_{\text{int}}$$

A carga interna  $q_{\text{int}}$  é a carga do eletrão ( $-1.602 \times 10^{-19}$  C). Assim, o fluxo através do

cubo é:

$$\Phi_e = \pi \times 4 \times 9 \times 10^9 \times (-1.602 \times 10^{-19}) = -18.09 \times 10^{-9} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$$

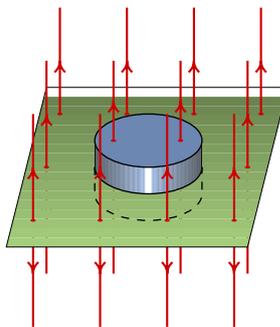
Por simetria, o fluxo em cada face deve ser o mesmo de maneira que o fluxo numa face é a sexta parte do fluxo no cubo:  $-3.02 \text{ nN} \cdot \text{m}^2/\text{C}$  (o sinal negativo indica que é para dentro do cubo).

### 6.4.1. Campo de um plano

Consideremos um plano, com carga distribuída uniformemente. Visto de lado, o plano aparece como um segmento de reta, e as linhas de campo serão semelhantes às linhas representadas no lado direito da figura 6.4.

Nas regiões perto do centro do plano, as linhas de campo são aproximadamente paralelas entre si. Quanto maior for o plano, maior será a região onde as linhas são aproximadamente paralelas. No caso idealizado de um plano infinito, as linhas serão completamente paralelas e equidistantes, já que a aparência do plano seria a mesma em qualquer ponto.

Para calcular o campo elétrico usando a lei de Gauss, imaginamos um cilindro com as tampas paralelas ao plano, como se mostra na figura 6.10.



**Figura 6.10.:** Cilindro imaginário usado para calcular o campo do plano.

Nas paredes laterais do cilindro não existe fluxo elétrico, porque o campo é paralelo à superfície. Em cada uma das tampas circulares do cilindro, o campo é perpendicular e, com módulo constante, devido a que todos os pontos na tampa estão à mesma distância do plano. Assim, o fluxo em cada uma das tampas do cilindro é  $AE$ , em que  $A$  é a área da tampa, e o fluxo total através do cilindro é:

$$\Phi_e = 2AE \tag{6.8}$$

De acordo com a lei de Gauss, esse fluxo também deverá ser igual a:

$$\Phi_e = 4\pi kQ \quad (6.9)$$

onde  $Q$  é a carga na parte do plano que está dentro do cilindro. Igualando as duas últimas equações obtemos o módulo do campo:

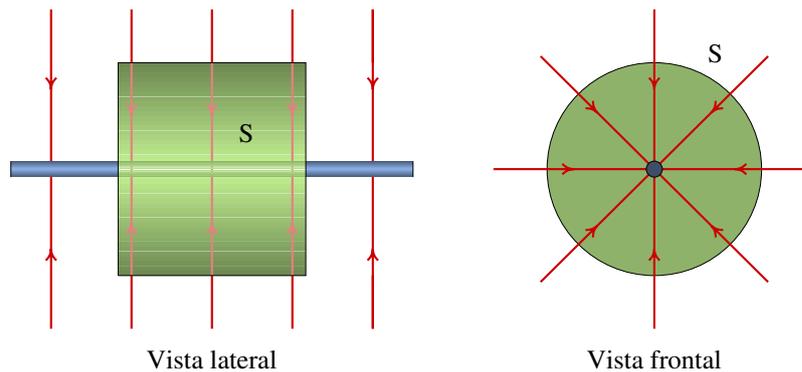
$$E_{\text{plano}} = 2\pi k\sigma \quad (6.10)$$

em que  $\sigma$  é a **carga superficial**; nomeadamente, carga por unidade de área:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (6.11)$$

### 6.4.2. Campo de um fio retilíneo

Consideremos um fio retilíneo, muito comprido, com carga distribuída uniformemente. As linhas de campo deverão ser nas direções radiais. Imaginemos uma superfície fechada que é um cilindro de raio  $R$  e altura  $L$ , com eixo sobre o fio, como mostra a figura 6.11.



**Figura 6.11.:** Linhas de campo de um cilindro com carga distribuída uniformemente, e superfície usada para calcular o campo.

Nas tampas circulares do cilindro o fluxo é nulo, porque o campo é paralelo à superfície; na parede lateral do cilindro, o campo é perpendicular e com módulo constante. Assim, o fluxo total será:

$$\Phi_e = 2\pi RLE \quad (6.12)$$

onde  $E$  é o módulo do campo à distância  $R$  do fio. De acordo com a lei de Gauss, esse fluxo deverá ser também igual a

$$\Phi_e = 4\pi kQ \quad (6.13)$$

onde  $Q$  é a carga do fio que está dentro do cilindro  $S$ . Igualando as duas equações anteriores, obtemos o módulo do campo:

$$E_{\text{fio}} = \frac{2k\lambda}{R} \quad (6.14)$$

em que  $\lambda$  é a **carga linear** (carga por unidade de comprimento):  $\lambda = Q/L$ .

### 6.4.3. Campo de uma esfera condutora

Numa esfera condutora, com carga  $Q$  e raio  $a$ , a força repulsiva entre as cargas do mesmo sinal, faz com que as cargas se distribuam em forma uniforme, na superfície da esfera. Existe assim simetria esférica, e as linhas de campo deverão apontar na direção radial.

Para calcular o campo, imaginamos uma esfera de raio  $r$ , concêntrica com a esfera condutora. Na superfície dessa esfera, o campo será perpendicular, e com módulo constante  $E$ ; consequentemente o fluxo será:

$$\Phi_e = 4\pi r^2 E \quad (6.15)$$

Segundo a lei de Gauss, o fluxo através da esfera de raio  $r$  será nulo, se  $r < a$ , ou igual a  $4\pi kQ$  se  $r > a$ . Portanto, o campo elétrico é nulo, no interior da esfera. Fora da esfera o campo é:

$$E = \frac{kQ}{r^2} \quad (6.16)$$

Que é idêntico ao campo produzido por uma carga  $Q$  concentrada no centro da esfera.

## Perguntas

- Um plano com  $2500 \text{ cm}^2$  de área tem uma carga total de  $20 \text{ nC}$ , distribuída uniformemente. O módulo do campo elétrico perto do plano é, aproximadamente:
 

A. $18.1 \text{ mN/C}$	D. $45.2 \text{ N/C}$
B. $4.52 \text{ kN/C}$	E. $0.452 \text{ N/C}$
C. $1.81 \text{ N/C}$	
- Uma esfera condutora de  $3 \text{ cm}$  de raio, isolada e com carga positiva, produz um campo de módulo  $36 \text{ } \mu\text{N/nC}$ , num ponto que se encontra a  $1 \text{ cm}$  da superfície da esfera. Calcule a carga total da esfera.
 

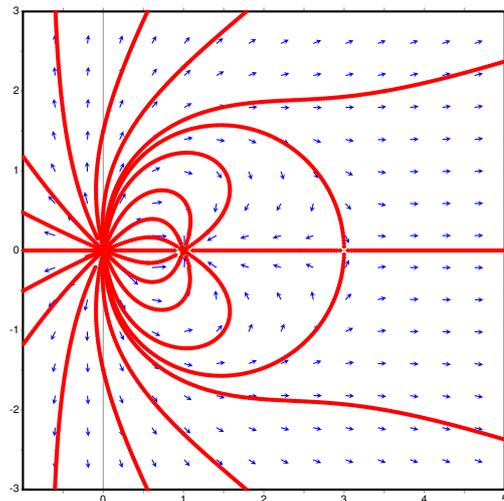
A. $36\pi$	C. $-72\pi$	E. $-144\pi$
B. $72\pi$	D. $108\pi$	
- Num sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  (em metros), existe uma carga pontual de  $2 \text{ nC}$  em  $(1,0,0)$ , uma carga pontual de  $-4 \text{ nC}$  em  $(0,2,0)$  e uma carga pontual de  $3 \text{ nC}$  em  $(0,0,4)$ . Calcule o fluxo elétrico (em unidades SI) através de uma esfera de raio  $3 \text{ m}$ , com centro na origem.
 

A. $36\pi$	C. $-72\pi$	E. $-144\pi$
B. $72\pi$	D. $108\pi$	

4. A carga existente numa esfera de raio 1 m está distribuída nesta de uma forma desconhecida. O fluxo do campo elétrico criado pela distribuição através de uma superfície esférica de raio 4 m, concêntrica com a esfera carregada, é de  $11.3 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$ . Qual é o fluxo do campo elétrico através de uma superfície esférica de raio 2 m?
- A.  $45.2 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
 B.  $22.6 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
 C.  $11.3 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
 D.  $56.5 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
 E.  $28.2 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$
5. Se numa superfície fechada o campo elétrico aponta para dentro da superfície em todos os pontos, o que é que podemos concluir?
- A. Existe carga positiva dentro da superfície.  
 B. Existe carga negativa dentro da superfície.  
 C. Não existe nenhuma carga dentro da superfície.  
 D. O campo é necessariamente perpendicular à superfície.  
 E. O campo é necessariamente paralelo à superfície.

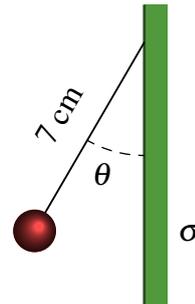
## Problemas

1. Na atmosfera existe um campo elétrico que aponta na vertical e para baixo. O módulo desse campo, a nível do mar, é aproximadamente 120 N/C e diminui em função da altura; a 2 km sobre o nível do mar o campo é aproximadamente 66 N/C. Que pode concluir acerca do sinal das cargas livres nos dois primeiros quilómetros da atmosfera? Calcule a carga volúmica média nessa região.
2. Uma carga pontual de 5 nC encontra-se a 6 cm de um fio retilíneo muito comprido, com carga linear constante e igual a 7 nC/cm. Calcule a força elétrica sobre o fio (sugestão: calcule melhor a força do fio sobre a carga pontual, que é mais fácil de calcular, e pela lei de ação e reação deverá ter o mesmo módulo).
3. A figura mostra as linhas de campo elétrico de duas partículas carregadas, uma delas na origem, e a outra no ponto (1, 0). No ponto (3, 0) existe um ponto de sela. Sabendo que a carga da partícula na origem é 18 nC, calcule a carga da outra partícula.



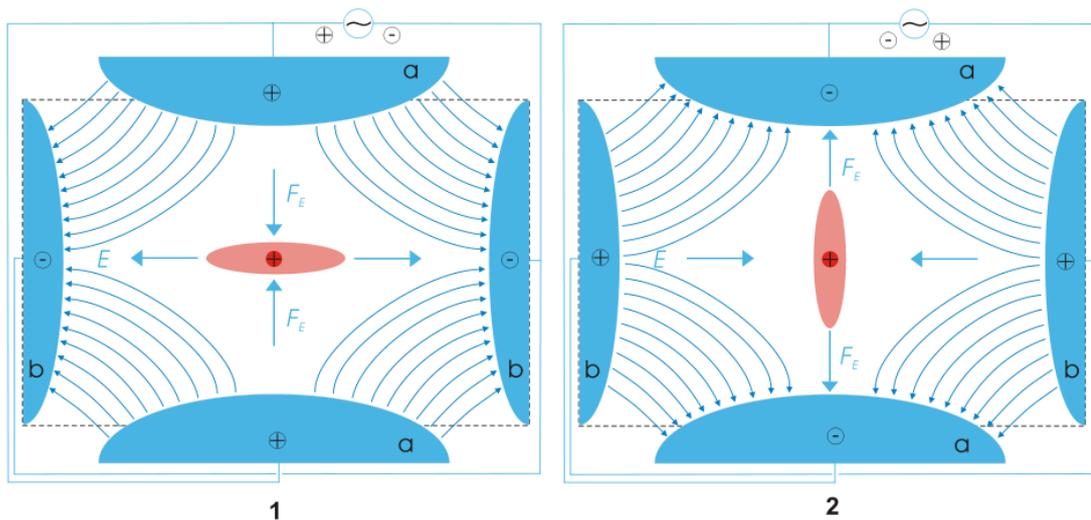
4. Duas cascas esféricas concêntricas, com raios  $a$  e  $b$ , encontram-se uma dentro da outra ( $a < b$ ). A casca esférica interna, de raio  $a$ , tem uma carga total  $Q$  distribuída uniformemente na sua superfície, e a casca externa tem uma carga  $-Q$ , distribuída uniformemente na sua superfície. Usando a lei de Gauss, calcule o campo elétrico nos pontos dentro da casca interna, entre as duas cascas e por fora da casca externa.
5. Uma esfera de raio  $R$  tem uma carga elétrica  $Q$  distribuída uniformemente dentro do seu volume. Usando a lei de Gauss, calcule o módulo do campo elétrico num ponto a uma distância  $r$  do centro da esfera. Considere os dois casos,  $r \geq R$  e  $r < R$ .

6. Uma partícula pontual com massa igual a 25 g e carga de 50 nC encontra-se pendurada de um fio de 7 cm que está colado a um plano vertical. O plano vertical tem uma carga superficial constante  $\sigma = 17 \text{ nC/cm}^2$  e pode ser considerado infinito. Calcule o ângulo  $\theta$  que o fio faz com o plano vertical.



7. Para simular as cargas num condensador de placas planas paralelas, considere um sistema de 13 cargas de valor  $+1$  nos pontos  $(-6,5)$ ,  $(-5,5)$ , ...,  $(5,5)$  e  $(6,5)$ , e 13 cargas de valor  $-1$  nos pontos  $(-6,-5)$ ,  $(-5,-5)$ , ...,  $(5,-5)$  e  $(6,-5)$ . Usando Maxima, desenhe o campo elétrico e as linhas de campo (o desenho é independente das unidades que sejam usadas).

## 7. Potencial eletrostático



Em 1989 Wolfgang Paul recebeu o prêmio Nobel da física pela sua invenção da **armadilha de íons** que permite isolar um único íon. Com essa invenção tornou-se possível estudar um átomo isolado, e pôr a prova a física quântica, já que nas experiências anteriores estavam sempre presentes muitos átomos. O princípio de funcionamento da armadilha de íons é muito simples. Usa-se um potencial de quadrupolo, nomeadamente, um sistema em que em dois lados opostos de um quadrado há dois condutores com potenciais positivos e nos outros dois lados há condutores com potenciais negativos, criando-se assim um ponto de sela no centro do quadrado.

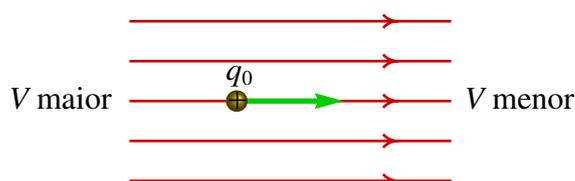
Os íons, com carga positiva, são empurrados para o centro pelos condutores com potencial positivo, e para fora do centro pelos condutores com potencial negativo. O potencial dos condutores inverte-se sucessivamente, o que faz com que após algum tempo unicamente o íon que se encontra no centro permaneça nesse ponto de equilíbrio.

## 7.1. Potencial e campo elétrico

A diferença de potencial entre dois pontos separados por um pequeno percurso  $d\vec{r}$  é:

$$\boxed{dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}} \quad (7.1)$$

esta equação mostra que o potencial decresce mais rapidamente na direção do campo elétrico e mantém-se constante na direção perpendicular ao campo. Em cada ponto onde o campo não for nulo, existe uma única direção em que o potencial permanece constante; o campo elétrico é perpendicular a essa direção, e aponta no sentido em que  $V$  diminui (figura 7.1). As cargas positivas deslocam-se no sentido em que o potencial decresce, e as cargas negativas deslocam-se no sentido em que o potencial aumenta.



**Figura 7.1.:** O campo elétrico aponta na direção e sentido em que o potencial diminui mais rapidamente.

Se  $E_s$  for a componente do campo na direção do deslocamento vetorial  $d\vec{r}$ , e  $ds$  for o módulo desse vetor, a equação 7.1 pode ser escrita

$$dV = -E_s ds \quad (7.2)$$

Assim, a componente do campo na direção e sentido de um vetor qualquer  $d\vec{r}$  é:

$$\boxed{E_s = -\frac{dV}{ds}} \quad (7.3)$$

onde  $dV$  é calculado na direção do vetor  $d\vec{r}$ . A derivada na expressão anterior é designada **derivada direccional** da função  $V$ , na direção definida por  $d\vec{r}$ .

Em particular, se a direção escolhida for no sentido dum dos 3 eixos cartesianos,  $E_s$  será a componente do campo na direção desse eixo, e a derivada direccional será a derivada parcial em função da variável associada ao eixo:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (7.4)$$

Para calcular o potencial num ponto, é costume arbitrar que o potencial seja nulo no infinito. Assim, o potencial no ponto P obtém-se a partir do integral

$$\boxed{V = -\int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{r}} \quad (7.5)$$

As 3 componentes cartesianas do campo não podem ser quaisquer 3 funções da posição, já que, a partir das equações 7.4 conclui-se que

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (7.6)$$

essas são as condições necessárias e suficientes para garantir que o campo seja conservativo. A matriz jacobiana do campo, em função da posição, é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial y} & \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial y} & \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial y} & \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

devido às condições 7.6, essa matriz é simétrica e, portanto, deverá ter unicamente valores próprios reais. Consequentemente, no espaço da posição, os pontos de equilíbrio do campo elétrico podem ser ou pontos de sela ou nós, mas nunca centros ou focos. No espaço de fase, como o sistema é conservativo, os pontos de equilíbrio podem ser pontos de sela ou centros.

---

### Exemplo 7.1

O campo elétrico numa região do espaço é dado pela expressão (unidades SI)

$$\vec{E} = 4xy\vec{e}_x + (2x^2 + 8yz^3)\vec{e}_y + 12y^2z^2\vec{e}_z$$

(a) Demonstre que o campo  $\vec{E}$  é conservativo. (b) Calcule o potencial eletrostático (defina  $V = 0$  na origem).

**Resolução.** (a) Para demonstrar que o campo é conservativo, basta calcular as derivadas parciais cruzadas das três componentes do campo e conferir que são iguais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 4x = \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= 0 = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} &= 24yz^2 = \frac{\partial E_z}{\partial y} \end{aligned}$$

(b) O potencial no ponto  $(x,y,z)$  é igual a menos o integral de linha do campo, desde a origem (onde arbitramos  $V = 0$ ) até esse ponto. Como o campo é conservativo, o integral pode ser calculado ao longo de qualquer percurso e o resultado será o mesmo. Escolhemos

um percurso formado pelos três segmentos de reta que unem os pontos  $(0,0,0)$ ,  $(x,0,0)$ ,  $(x,y,0)$  e  $(x,y,z)$ :

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= - \int_0^x E_x(x,0,0) dx - \int_0^y E_y(x,y,0) dy - \int_0^z E_z(x,y,z) dz \\ &= - \int_0^x 0 dx - 2x^2 \int_0^y dy - 12y^2 \int_0^z z^2 dz \\ &= -2yx^2 - 4y^2z^3 \end{aligned}$$

## 7.2. Potencial devido a cargas pontuais

Em duas dimensões, o campo elétrico produzido por um sistema de  $n$  cargas pontuais  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , é dado pela equação 6.3 do capítulo anterior. O potencial é a função de  $x$  e  $y$  com derivadas parciais iguais às duas componentes do campo. Assim, o potencial é:

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{k q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} \quad (7.8)$$

Onde  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas da posição da partícula  $i$ .

Este resultado pode ser generalizado para o caso de 3 dimensões. O resultado é:

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{k q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} \quad (7.9)$$

as coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  correspondem à posição  $\vec{r}_i$  da partícula número  $i$  com carga  $q_i$ . O denominador na equação 7.9 é a distância  $|\vec{r} - \vec{r}_i|$  entre o ponto onde está a ser calculado o potencial e o ponto onde está a carga  $q_i$ .

### Exemplo 7.2

Uma carga pontual de +1 nC encontra-se na origem, e uma segunda carga de +4 nC encontra-se no ponto  $x = 30$  cm,  $y = 0$ . Encontre a expressão para o potencial, no plano  $xy$  e desenhe essa função de duas variáveis.

**Resolução.** A constante de Coulomb pode ser escrita assim:

$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{C}} = 900 \frac{\text{V} \cdot \text{cm}}{\text{nC}}$$

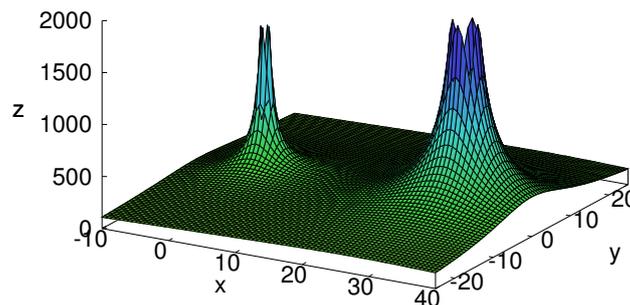
Usando as distâncias em cm, as cargas em nC e  $k = 900$ , o potencial estará em volts. Substituindo na equação 7.9, com  $z = 0$ , obtemos a expressão para o potencial no plano  $xy$ :

$$V(x,y) = \frac{900}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{3600}{\sqrt{(x-30)^2+y^2}}$$

Para desenhar o gráfico dessa função, usaremos os seguintes comandos no Maxima:

```
(%i1) V: 900/(x^2+y^2)^(1/2) + 3600/((x-30)^2+y^2)^(1/2) $
(%i2) plot3d(V, [x,-10,40], [y,-25,25], [z,0,2000], [legend,false],
[grid,80,80]) $
```

O resultado pode ser visto na figura 7.2.

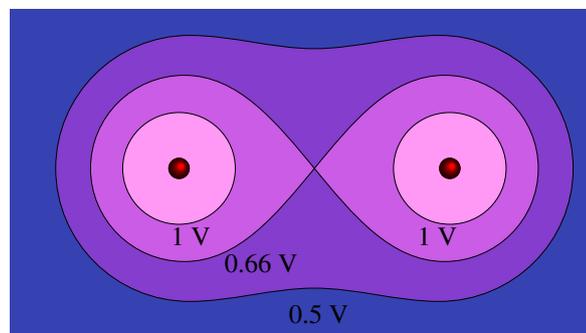


**Figura 7.2.:** Potencial de duas cargas de +1 nC e +4 nC, no plano  $xy$ .

A opção `[z, 0, 2000]` foi usada para limitar o valor máximo de  $V$  a ser apresentado, já que nos pontos onde se encontram as cargas pontuais positivas o potencial aumenta até infinito.

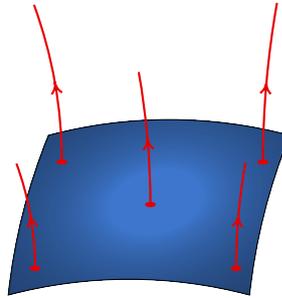
### 7.3. Superfícies equipotenciais

Os pontos do espaço onde o potencial tem um valor determinado formam superfícies contínuas designadas de superfícies **equipotenciais**. Por exemplo, a figura 7.3 mostra a interseção do plano  $xy$  com as superfícies equipotenciais de 0.5 V, 0.66 V e 1 V.



**Figura 7.3.:** Superfícies equipotenciais de um sistema de duas cargas positivas iguais.

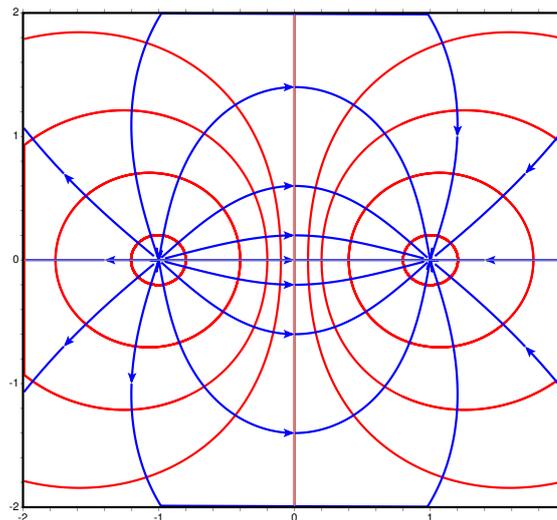
Em qualquer direção ao longo duma superfície equipotencial, o produto escalar  $\vec{E} \cdot d\vec{r}$  deverá ser nulo, já que  $dV = 0$ . Isso implica que o campo elétrico será perpendicular às superfícies equipotenciais (figura 7.4).



**Figura 7.4.:** Superfície equipotencial, e linhas de campo, perpendiculares à superfície.

Em duas dimensões, as superfícies equipotenciais aparecem como uma família de curvas perpendiculares às linhas de campo elétrico. Por exemplo, a figura 7.5, apresenta as superfícies equipotenciais e as linhas de campo elétrico de um dipolo elétrico, com uma carga positiva de 1 nC no lado esquerdo e uma carga negativa de  $-1$  nC no lado direito, e foi obtida com os seguintes comandos no Maxima:

```
(%i3) v: 900/((x+1)^2+y^2)^(1/2)-900/((x-1)^2+y^2)^(1/2)$
(%i4) ploteq(v, [x,-2,2], [y,-2,2])$
```



**Figura 7.5.:** Superfícies equipotenciais e linhas de campo de um dipólo elétrico.

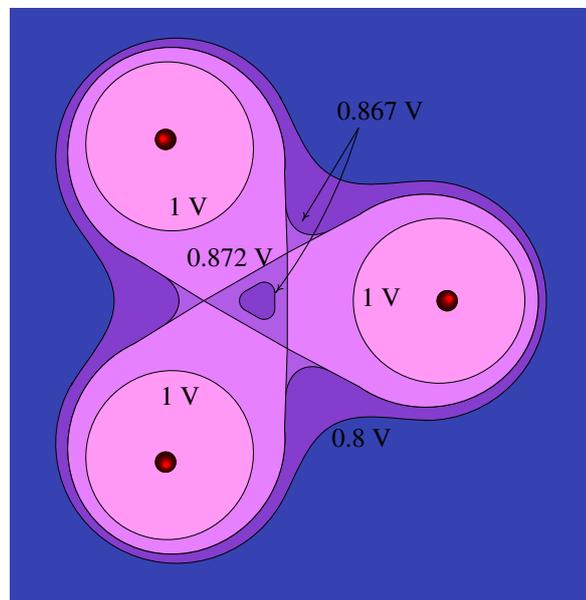
## 7.4. Pontos críticos do potencial

As linhas de campo elétrico apontam na direção em que o potencial decresce. Consequentemente, num ponto onde o potencial tiver um valor máximo local, existirão linhas a apontar para fora desse ponto (nó repulsivo); o fluxo numa superfície fechada à volta desse ponto será positivo. Isso implica que na região onde o potencial é máximo deverá existir carga positiva.

Num ponto onde o potencial tiver um valor mínimo local, as linhas de campo apontarão na direção desse ponto (nó atrativo). O fluxo numa superfície fechada à volta do ponto será negativo. Assim, deverá existir carga negativa nesse ponto.

Os pontos máximos e mínimos do potencial podem ser pontos onde o potencial aproxima-se de  $+\infty$  ou  $-\infty$ , no caso de cargas pontuais, ou pontos de equilíbrio, onde as derivadas do potencial são todas nulas. Existe um terceiro tipo de ponto crítico, **ponto de sela**, em que o potencial é máximo em algumas direções e mínimo em outras. Portanto, em algumas direções entram linhas de campo e em outras direções saem; o fluxo numa superfície fechada à volta do ponto deverá ser nulo e, assim, nesse ponto o campo será nulo. Os pontos de sela são pontos de equilíbrio instável.

Como nos pontos máximos e mínimos do potencial há linhas de campo a sair ou entrar em todas as direções, esses pontos encontram-se dentro de superfícies equipotenciais fechadas, umas dentro das outras, aproximando-se do ponto mínimo ou máximo. Nos pontos de sela há sempre um cruzamento das superfícies equipotenciais.



**Figura 7.6.:** Superfícies equipotenciais de um sistema de 3 cargas positivas.

A figura 7.6 mostra um exemplo: as superfícies equipotenciais de um sistema de três cargas positivas. Nesse desenho existem três famílias de esferas fechadas que se aproximam das

três cargas positivas, onde o potencial tem um valor máximo local. Existem também quatro pontos de sela, onde o campo elétrico é nulo e as superfícies equipotenciais cruzam-se: três deles são evidentes no desenho, formando um pequeno triângulo perto do centro. O quarto ponto de sela está no centro do desenho; no plano  $xy$  esse ponto aparece como se fosse um mínimo do potencial, mas no espaço  $xyz$  é um ponto de sela; há linhas de campo a afastarem-se desse ponto no sentido do eixo dos  $z$ , e o fluxo à volta desse ponto é nulo.

## 7.5. Potencial e energia eletrostática

Se uma partícula com carga  $q$  se deslocar entre dois pontos onde existe uma diferença de potencial  $\Delta V$  a variação da sua energia potencial eletrostática será:

$$\Delta U_e = q\Delta V \quad (7.10)$$

Devido a que o campo elétrico é um campo conservativo, a energia mecânica conserva-se e a variação da energia potencial implica uma variação da energia cinética.

Quando se trata de partículas elementares com cargas da ordem de grandeza da carga elementar, costuma usar-se uma unidade de energia designada de **elétron-volt** (eV), que corresponde à energia adquirida por um elétron quando se deslocar para uma região onde o potencial aumenta em 1 V. Assim, passando para o sistema internacional:

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (7.11)$$

## 7.6. Potencial nos condutores

Dentro de um condutor isolado, o campo elétrico é nulo. Se assim não fosse, existiria movimento das cargas livres, criando um campo interno que contraria o campo externo; o movimento das cargas livres só pára quando o campo total for nulo. O tempo que demoram as cargas livres a redistribuírem-se para que o campo no condutor seja nulo é bastante pequeno e pode ser considerado nulo.

Como o campo elétrico é nulo dentro do condutor isolado, não existem linhas de campo elétrico, e o potencial em todos os pontos dentro do condutor é o mesmo. O fluxo em qualquer parte dentro do condutor também é nulo e, assim, de acordo com a lei de Gauss, não pode existir carga em nenhuma parte dentro do condutor. Toda a carga elétrica acumula-se na superfície do condutor.

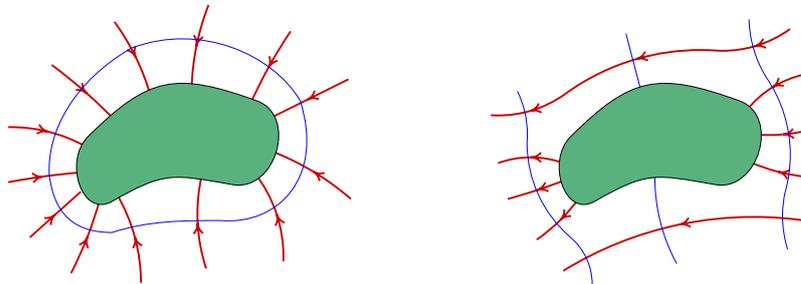
A própria superfície do condutor é uma superfície equipotencial, já que todos os pontos do condutor têm o mesmo potencial; assim, as linhas de campo elétrico fora do condutor são perpendiculares à sua superfície.

Um exemplo é um automóvel, que é um condutor, isolado pelos pneus que são isoladores. A terra é um condutor; assim, se o automóvel tiver carga positiva, as linhas de campo saem perpendiculares ao automóvel e entram de forma perpendicular no chão (figura 7.7).



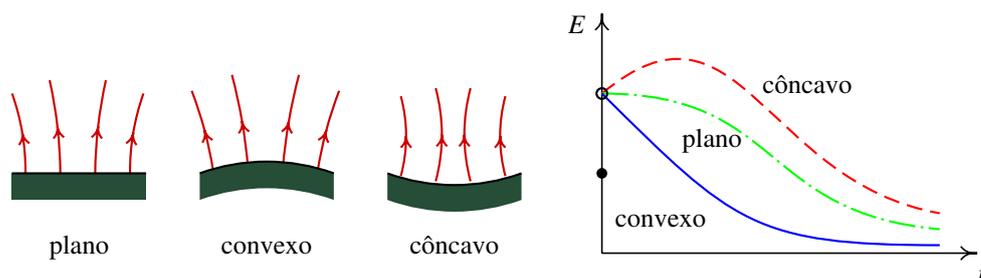
**Figura 7.7.:** Um carro é um condutor isolado. As linhas de campo são perpendiculares à superfície da carroçaria e ao chão.

Se o condutor tiver uma carga total não nula, por exemplo, negativa como no lado esquerdo da figura 7.8, nesse caso o potencial nele tem um valor mínimo local e há superfícies equipotenciais à volta do condutor. Se o condutor não tiver carga total, como no lado direito da figura 7.8 o campo na sua superfície é devido a algum campo externo, que separa cargas positivas e negativas na superfície do condutor; a superfície equipotencial do condutor estende-se por fora do condutor de forma perpendicular ao campo externo.



**Figura 7.8.:** Superfícies equipotenciais e linhas de campo de um condutor com carga negativa (à esquerda), e de um condutor sem carga, dentro de um campo externo (à direita).

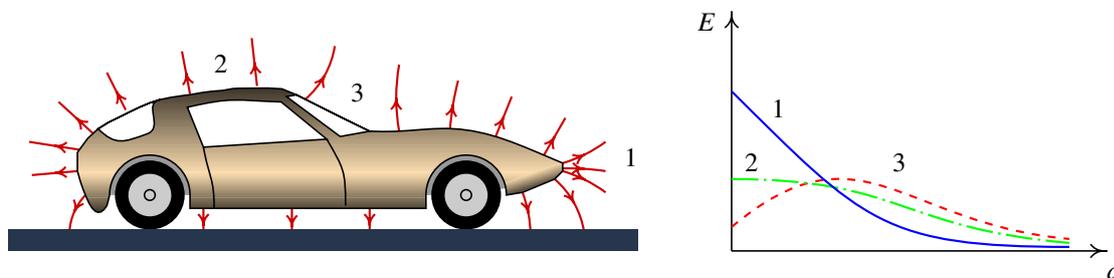
A distribuição de cargas na superfície dum condutor isolado não pode ser uniforme. Consideremos três condutores diferentes com a mesma carga superficial  $\sigma$ , um deles plano, o outro convexo e o último côncavo (figura 7.9). Nos três casos a separação das linhas de campo sobre a superfície deve ser a mesma e o campo é igual nos três casos quando a distância  $d$  a partir da superfície for igual a zero. À medida que  $d$  aumenta, como as linhas de campo são perpendiculares à superfície do condutor, a separação das linhas vai ser maior no caso do condutor convexo e menor no caso do condutor côncavo; no caso do condutor côncavo, as linhas de campo acabam por se afastar à medida que  $d$  aumenta. Como o campo elétrico é inversamente proporcional à distância entre as linhas de campo, o campo produzido pelos três condutores é como mostra a figura 7.9.



**Figura 7.9.:** Três condutores com a mesma carga superficial e o campo produzido em função da distância  $d$  a partir da superfície.

O potencial de cada um dos condutores na figura 7.9 obtém-se integrando o campo elétrico desde a superfície ( $d = 0$ ) até o infinito (onde  $V = 0$ ). No gráfico da direita, os valores dos três potenciais são as áreas sob as três curvas dos módulos dos campos elétricos. Assim, o condutor côncavo encontra-se a um potencial maior que o condutor plano e estes dois condutores estão a um potencial maior que o condutor convexo.

Em pontos diferentes da superfície de um condutor, o potencial é sempre o mesmo. Portanto, a carga superficial não pode ser a mesma nos pontos onde o condutor é côncavo, convexo ou plano. A carga superficial tem que ser maior nas regiões convexas, menor nas regiões planas e ainda menor nas regiões côncavas. Desta forma obtém-se o mesmo valor para o integral do campo elétrico, como se mostra na figura 7.10.



**Figura 7.10.:** Num automóvel carregado, a carga superficial é maior nos pontos mais pontiagudos. O gráfico mostra o campo elétrico em três pontos, em função da distância desde a superfície. A área sob as três curvas deve ser igual.

Nas regiões convexas, quanto menor for o raio da curvatura, maior será a carga superficial, e nas regiões côncavas quanto maior for o raio da curvatura, maior será a carga superficial. A carga acumula-se mais nas pontas da superfície dum condutor. Este efeito é aproveitado nos pára-raios; os raios são atraídos para a ponta do pára-raios, onde há uma maior acumulação de cargas e, portanto, o campo elétrico é mais intenso.

### 7.6.1. Potencial de uma esfera condutora

Numa esfera condutora, as cargas distribuem-se uniformemente na superfície. No capítulo anterior vimos que esse tipo de distribuição de carga produz um campo nulo no interior da esfera, e no exterior o campo é idêntico a que existiria se toda a carga estivesse concentrada no centro da esfera. Assim, o potencial fora da esfera deverá ser idêntico ao potencial de uma carga pontual  $Q$ :

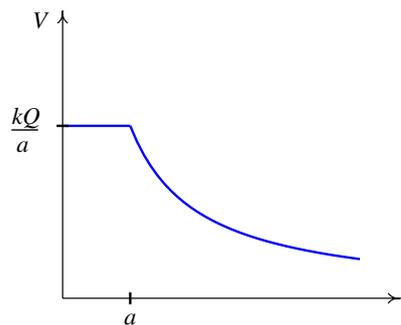
$$V = \frac{kQ}{r} \quad (\text{se } r > a) \quad (7.12)$$

em que  $Q$  é a carga total da esfera, e  $a$  o seu raio.

Para que o campo seja nulo no interior da esfera, o potencial deverá ser constante nessa região. Como o potencial deve ser uma função contínua, o valor constante do potencial, dentro da esfera, deverá ser o mesmo que na superfície; nomeadamente

$$V = \frac{kQ}{a} \quad (\text{se } r < a) \quad (7.13)$$

Dentro da esfera ( $r < a$ ) o campo é nulo e o potencial é constante. Fora da esfera, o potencial decresce inversamente proporcional à distância (ver figura 7.11).



**Figura 7.11.:** Potencial produzido por uma esfera condutora isolada.

## Perguntas

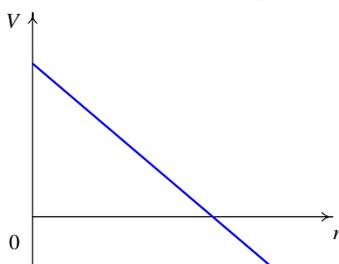
1. O potencial produzido por um sistema de duas cargas pontuais,  $Q$  e  $q$ , é nulo num ponto P. Isso implica que:

- A. A força sobre uma carga de prova no ponto P é nula.
- B.  $Q$  e  $q$  têm o mesmo sinal.
- C. O campo elétrico é nulo no ponto P.
- D. O trabalho total necessário para trazer as cargas  $Q$  e  $q$  até às suas posições é nulo.
- E. O trabalho necessário para trazer uma carga desde o infinito até o ponto P é nulo.

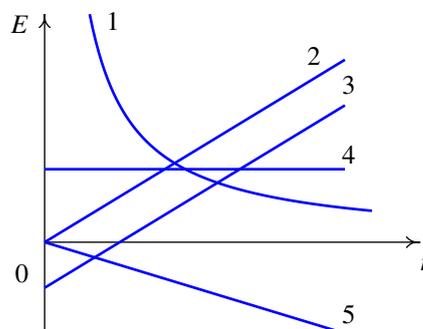
2. Uma carga de  $4 \mu\text{C}$  encontra-se dentro de um campo elétrico com módulo igual a  $4 \times 10^5 \text{ N/C}$ . Qual é o trabalho necessário para deslocar essa carga uma distância de 20 cm numa direção a  $60^\circ$  com o campo elétrico?

- A. 0.28 J
- B. 160 mJ
- C. 0.68 J
- D. 28 J
- E. 16 J

3. O potencial elétrico de um sistema, em função da distância ao longo de uma direção dada é representado pelo gráfico:

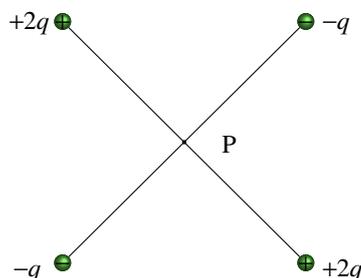


Qual das cinco funções no gráfico a seguir representa melhor o módulo do campo ao longo da mesma direção?



- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

4. Quatro cargas pontuais, com valores  $+2q$  e  $-q$ , encontram-se nos vértices de um quadrado, como mostra a figura. O que é que podemos afirmar acerca do potencial ( $V$ ) e do módulo do campo ( $E$ ) no centro do quadrado (P)?



- A.  $E \neq 0, V > 0$
- B.  $E = 0, V = 0$
- C.  $E = 0, V > 0$
- D.  $E \neq 0, V < 0$
- E.  $E \neq 0, V \neq 0$

5. Perto de uma carga pontual existe um ponto onde o potencial elétrico produzido pela carga é 3 V (arbitrando potencial nulo no infinito) e o módulo do campo elétrico da carga é 200 N/C. Calcule a distância desde a carga até ao ponto.

- A. 3 m
- B. 3 cm
- C. 1.5 cm
- D. 0.67 cm
- E. 6.7 cm

## Problemas

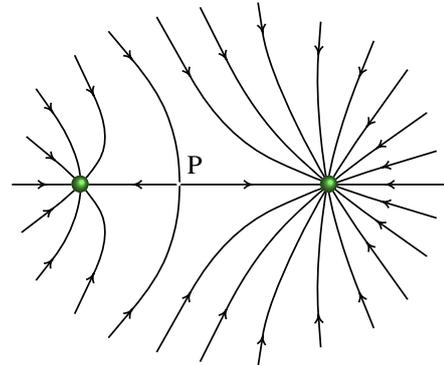
1. O potencial no plano  $xy$  é

$$V(x,y) = \frac{1250}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} + 50x$$

Calcule o campo elétrico, em função de  $x$  e  $y$ . Usando Maxima, desenhe as superfícies equipotenciais e as linhas de campo. Existe algum ponto onde o campo seja nulo? A que tipo de sistema corresponde esse potencial?

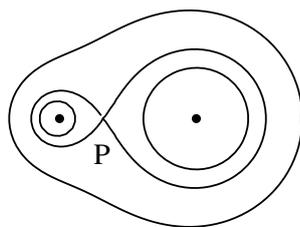
2. Existe um campo elétrico uniforme entre duas placas paralelas separadas por 2.0 cm. O módulo do campo é 15 kN/C. Calcule a diferença de potencial entre as placas.
3. O potencial elétrico a uma certa distância de uma carga pontual é 600 V (arbitrando potencial nulo no infinito) e o campo elétrico é 200 N/C. Calcule a distância e o valor da carga.
4. Duas superfícies condutoras esféricas e concêntricas têm raios de 5 cm e 7 cm. A superfície menor tem uma carga total de 3 nC e a carga total na superfície maior é de  $-2$  nC. Calcule a diferença de potencial entre as duas superfícies.

5. A figura representa as linhas de campo eletrostático de duas partículas carregadas e separadas por uma distância de 7 cm. A relação entre os valores das duas cargas é  $4/9$ . (a) Calcule a distância do ponto P às partículas. (b) Sabendo que a carga da partícula no lado direito é de  $-8$  nC, calcule o potencial no ponto P (arbitre  $V = 0$  no infinito).

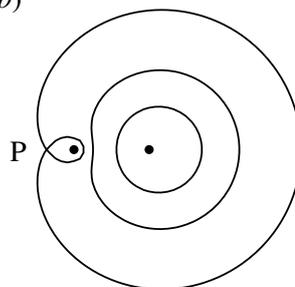


6. Nos três desenhos a seguir representam-se as superfícies equipotenciais de três sistemas de duas cargas pontuais  $q_1$  e  $q_2$ . Em todos os casos  $q_1 = 3$  nC, e a distância entre as duas cargas é 6 cm. Nos desenhos (a) e (b) a distância entre o ponto P e a carga  $q_1$  é igual a 2 cm. Calcule  $q_2$  nos três casos.

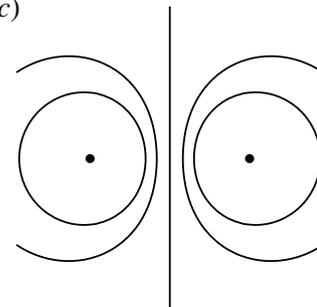
(a)



(b)



(c)

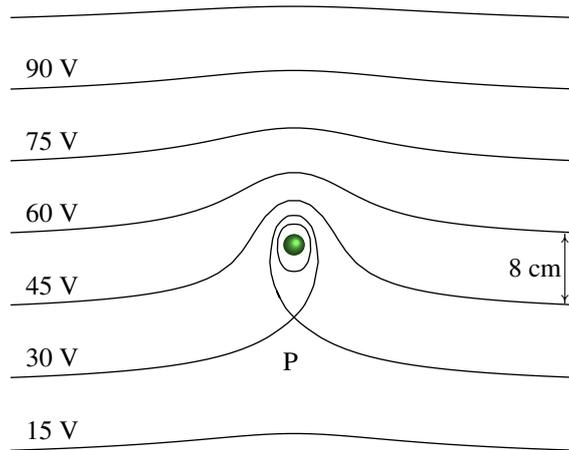


7. O potencial sobre o plano  $xy$  é (unidades SI):

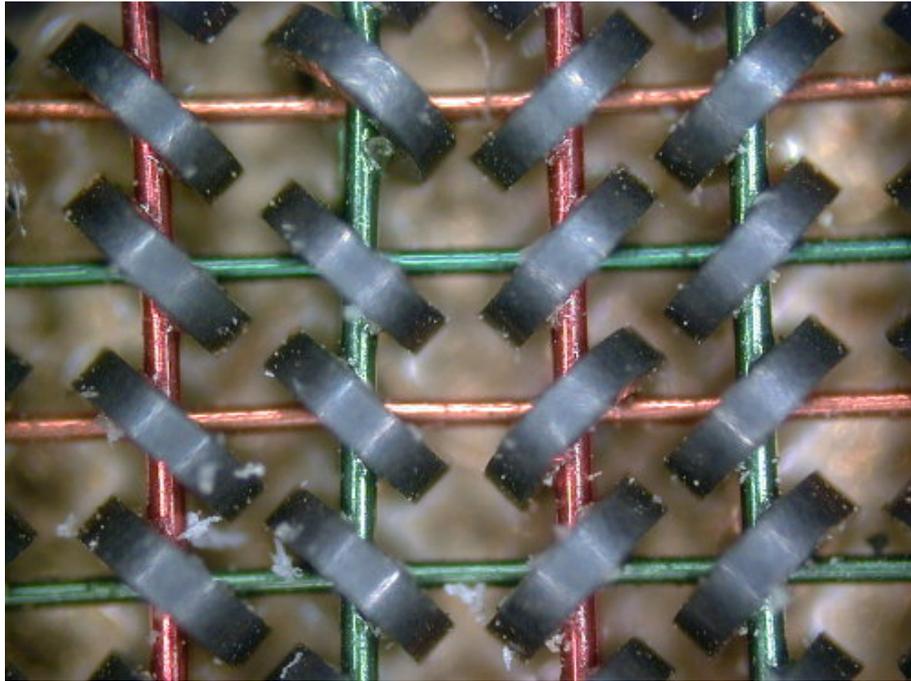
$$V = \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{3}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

Calcule o campo elétrico em qualquer ponto no plano  $xy$ . Usando o Maxima, desenhe as superfícies equipotenciais e as linhas de campo. Existe algum ponto onde o campo seja nulo?

8. A figura mostra as superfícies equipotenciais de uma carga pontual no interior de um campo elétrico uniforme  $\vec{E}_{\text{ext}}$ . As grandes distâncias da carga pontual as superfícies são planos paralelos distanciados 8 cm. (a) Calcule o módulo e a direção do campo externo  $\vec{E}_{\text{ext}}$ . (b) Diga se a carga pontual é positiva ou negativa. Justifique. (c) Qual é a direção da força sobre a carga pontual? (d) Sabendo que a distância entre a carga pontual e o ponto P é 9 cm, calcule o valor da carga pontual.



## 8. Campo magnético



As primeiras memórias de computador que foram construídas, consistiam numa quadricula de fios de cobre, com pequenos anéis de material ferromagnético em cada interseção entre dois fios. Fazendo passar uma corrente por dois fios perpendiculares, consegue-se magnetizar o anel que está na interseção entre os dois fios; nos outros anéis, a corrente de um único fio não é suficiente para magnetizar. O estado de magnetização de um anel pode ser detetado porque produz interferências na corrente nos fios que passam pelo anel. Para apagar uma posição na memória (desmagnetizar um dos anéis), faz-se passar corrente nos dois fios correspondentes, em sentido oposto ao sentido usado para magnetizar o anel. O sistema na fotografia está ampliado; os 16 anéis que se mostram permitem armazenar apenas 2 bytes, e fazem parte de uma memória com capacidade total de 4 quilobytes. Hoje em dia usam-se outras técnicas que permitem obter capacidades um milhão de vezes superior (gigabytes), num espaço muito menor.

## 8.1. Força magnética

A força magnética é outro tipo de força entre objetos, que atua a distância sem existir contato entre os objetos, tal como a força gravítica e a força elétrica. Pode ser atrativa ou repulsiva, o que fez com que antigamente (antes de 1600) fosse confundida com a força elétrica.

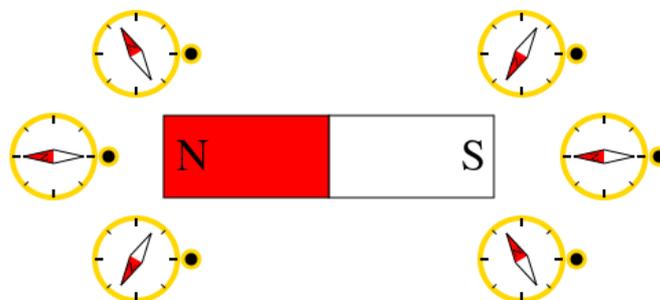
Existem ímanes naturais que se encontram na natureza; na Grécia antiga, as rochas extraídas nas minas da região da Magnesia eram ímanes naturais que deram origem ao termo magnetismo. Um íman tem sempre um pólo norte e um pólo sul. Aproximando dois pólos opostos de dois ímanes, surge uma força atrativa entre os ímanes; e entre pólos semelhantes a força é repulsiva.

Um íman cria um campo magnético à sua volta. O campo pode ser detetado com uma bússola, que é também um pequeno íman. A figura 8.1 mostra um íman de forma de barra retangular; o pólo norte costuma estar pintado de vermelho. Aproximando uma bússola dos pólos, consegue ver-se a direção das linhas de campo magnético; por convenção, as linhas de campo são no sentido em que aponta o pólo norte da bússola; em cada ponto define-se um vetor de campo magnético,  $\vec{B}$ , com o sentido e direção da orientação da bússola.

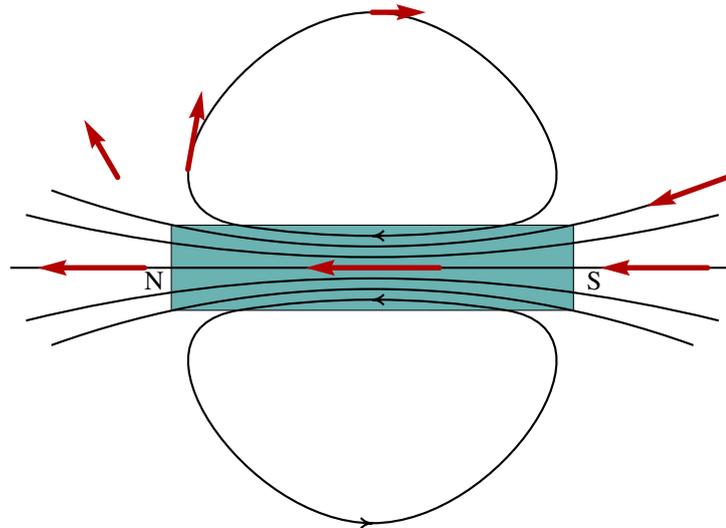
As linhas de campo saem do pólo norte e entram no pólo sul; são semelhantes às linhas de campo elétrico de um dipolo elétrico, mas a diferença é que as linhas de campo magnético não terminam no pólo sul, nem começam no pólo norte, mas são linhas fechadas que passam pelos dois pólos (figura 8.2).

Se partirmos um íman em vários pedaços menores, em cada pedaço aparecem um pólo norte e um pólo sul. É impossível obter um pólo norte ou um pólo sul isolado. Essa é a maior diferença em relação ao campo elétrico, onde podem existir cargas positivas ou negativas isoladas.

A inexistência de mono-pólos magnéticos implica que não podem existir pontos para onde muitas linhas de campo convergem, nem pontos de onde muitas linhas de campo divergem.



**Figura 8.1.:** A bússola aponta no sentido das linhas de campo magnético.



**Figura 8.2.:** Linhas de campo de um íman retangular.

Em relação à matriz jacobiana do campo magnético num ponto do espaço:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

um valor próprio real, diferente de zero, implica infinitas linhas de campo a sair ou entrar no ponto, excepto no caso em que exista outro valor próprio com o mesmo valor absoluto e sinal oposto (nesse caso existem apenas duas linhas que entram no ponto e duas que saem). Consequentemente, a soma de todos os valores próprios deverá ser nula; lembrando que a soma dos valores próprios de uma matriz é igual ao seu traço, vem:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (8.2)$$

essa soma é designada de **divergência** do campo. A condição de que a divergência do campo seja nula equivale a dizer que não podem existir nem focos nem nós porque nesse caso a soma dos valores próprios não seria nula. Os pontos de equilíbrio do campo magnético podem ser apenas centros ou pontos de sela.

Por exemplo, num íman retangular como o da figura 8.2 as linhas de campo abrem-se fora de cada pólo, curvando-se para passar pelo outro pólo; isso implica que o campo decresce rapidamente perto dos pólos. Uma forma de conseguir que as linhas de campo não se abram tanto, para obter um campo mais forte, consiste em dobrar a barra de forma de ferradura, para que os dois pólos fiquem mais perto um do outro (ver figura 8.3).



**Figura 8.3.:** Ímã de forma de ferradura. O pólo norte está pintado de vermelho, e o pólo sul de verde.

A própria Terra é também um ímã natural e, por isso, a bússola aponta na direção do pólo norte geográfico. As linhas do campo magnético terrestre têm o sentido do pólo sul geográfico para o pólo norte geográfico. Assim, o pólo norte geográfico é, de facto, o pólo sul magnético da Terra, e o pólo sul geográfico é o pólo norte magnético.

Os materiais que podem ser magnetizados, formando um ímã, são chamados **ferromagnéticos**; a maior parte das substâncias são **diamagnéticas**, nomeadamente, não podem ser magnetizadas e não interagem com o campo magnético de forma apreciável, excepto num campo magnético muito forte, onde sentem uma força repulsiva. Finalmente, existem também substâncias **paramagnéticas** que são atraídas ligeiramente pelos ímanes (os materiais ferromagnéticos são atraídos com maior força).

## 8.2. Força magnética sobre condutores com corrente

Um campo magnético também pode ser detetado com um fio com corrente. O campo magnético produz uma força sobre o fio, diretamente proporcional à corrente. A força magnética sobre um pequeno segmento de fio depende também da orientação do fio em relação ao campo magnético; se o fio for paralelo ao campo magnético, a força é nula, e se o fio for perpendicular ao campo, a força é máxima. O módulo da força também é diretamente proporcional ao comprimento do pedaço de fio. A constante de proporcionalidade define o módulo do campo magnético,  $B$ .

A direção da força é sempre perpendicular ao campo magnético e perpendicular ao fio; o sentido da força segue a regra da mão direita entre o sentido da corrente e o sentido do campo magnético. Usando vetores, a força pode ser escrita assim:

$$\Delta \vec{F} = \vec{I} \times \vec{B} \Delta s \quad (8.3)$$

Em que  $\vec{I}$  é um vetor na direção do fio, no sentido da corrente e com módulo igual à

intensidade da corrente.  $\Delta s$  é o comprimento do segmento de fio.

No caso geral, será preciso integrar a equação 8.3 para obter a força total sobre um fio. No caso particular em que o fio for retilíneo, com comprimento  $L$ , e o campo magnético for uniforme, a força resultante é:

$$\vec{F} = L\vec{I} \times \vec{B} \quad (8.4)$$

A equação 8.3 permitem-nos concluir que, no sistema internacional de unidades, as unidades do campo magnético são  $\text{N}/(\text{m} \cdot \text{A})$ . Essa unidade é o **tesla**, identificado pela letra T. Um campo magnético de um tesla é um campo bastante elevado. Uma unidade menor, usada com frequência, é o gauss, identificado com a letra G:

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T} \quad (8.5)$$

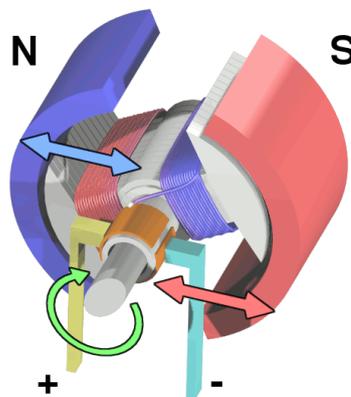
o módulo do campo magnético terrestre, na superfície da Terra, encontra-se entre 0.3 G e 0.6 G em diferentes locais.

### 8.3. Momento magnético

A força resultante sobre uma bússola produzida pelo campo magnético da Terra, é quase nula, devido a que sobre os dois pólos magnéticos atuam forças iguais e opostas. No entanto, essas forças produzem um torque suficientemente forte para poder ser observado facilmente. Qualquer ímã, em particular a bússola, tem um **momento magnético**,  $\vec{m}$  que é um vetor orientado desde o seu pólo sul até o seu pólo norte; um campo magnético  $\vec{B}$  produz um torque,  $\vec{\tau}$ , igual ao produto vetorial entre o momento magnético e o campo:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (8.6)$$

o torque será sempre no sentido que faz rodar o momento magnético  $\vec{m}$  até apontar no sentido do campo  $\vec{B}$ .



**Figura 8.4.:** Motor elétrico de corrente contínua.

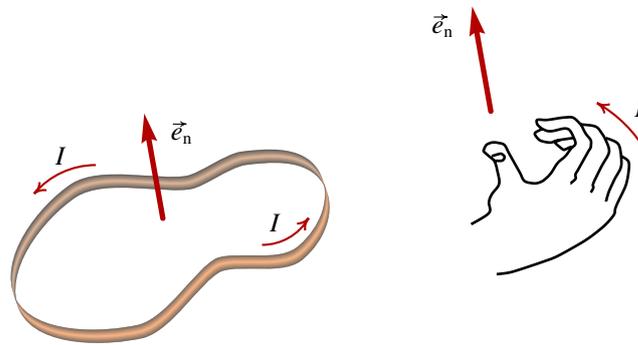
O torque produzido pelo campo magnético é o princípio usado nos motores elétricos (figura 8.4). O motor tem uma bobina, que pode rodar à volta de um eixo, dentro de um campo

magnético produzido por ímanes fixos. A bobina é um fio condutor enrolado várias vezes. Cada volta completa do fio na bobina designa-se de **espira**.

Quando o fio é percorrido por uma corrente  $I$ , as forças magnéticas sobre os diferentes segmentos de cada espira anulam-se, mas há um torque resultante; pode mostrar-se que se o campo for uniforme, o torque resultante verificará a equação 8.6, sendo o momento magnético da espira igual a:

$$\vec{m} = AI\vec{e}_n \quad (8.7)$$

onde  $A$  é a área da espira e  $\vec{e}_n$  o versor perpendicular à espira, no sentido definido pela regra da mão direita, como mostra a figura 8.5: o polegar da mão direita define o sentido de  $\vec{m}$ , quando os outros quatro dedos apontarem no sentido da corrente na espira.



**Figura 8.5.:** Definição do momento magnético de uma espira.

O momento magnético de uma bobina é a soma dos momentos das espiras que formam essa bobina. Se a bobina tiver  $N$  espiras, comporta-se como um íman com momento magnético  $\vec{m} = NIA\vec{e}_n$ . Se o campo não for uniforme, a área da bobina deverá ser dividida em pequenos pedaços para calcular o torque total por meio de um integral de superfície.

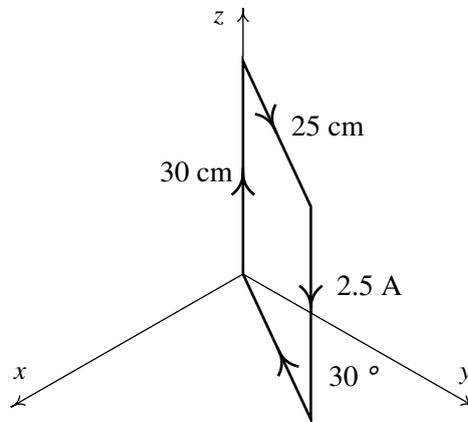
Num motor, os dois terminais da bobina ligam-se a um comutador que roda juntamente com a bobina. Na figura 8.4 pode ver-se o comutador (cilindro com dois setores metálicos independentes) a fazer contato com os dois terminais  $+$  e  $-$  ligados a uma *fem* externa. Quando a bobina roda, chega até uma posição em que o segmento do comutador que estava em contato com o terminal positivo passa a estar em contato com o terminal negativo e vice-versa, invertendo-se o sentido da corrente na bobina.

O comutador é colocado de forma a que, quando o momento magnético da bobina estiver na direção e sentido do campo magnético do íman (de esquerda para direita, na figura 8.4), o sentido da corrente seja invertido, fazendo com que o ângulo entre o momento magnético e o campo passe de  $0^\circ$  para  $180^\circ$ . Assim, a bobina roda constantemente, porque o torque magnético tende sempre a diminuir esse ângulo até  $0^\circ$ .

### Exemplo 8.1

Uma espira retangular com arestas de 25 cm e 30 cm, transporta uma corrente de 2.5 A, no sentido indicado na figura. A espira encontra-se num plano vertical que faz um ângulo

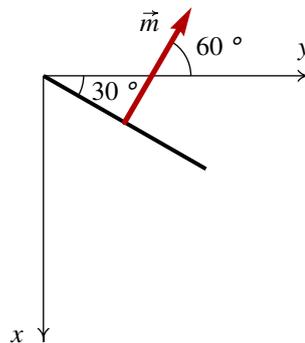
de  $30^\circ$  com o plano  $yz$ . Existe um campo magnético uniforme  $\vec{B} = 0.2\vec{e}_y$  (SI). Calcule o torque produzido pelo campo magnético sobre a espira e diga em que sentido rodará a espira.



**Resolução.** A área da espira é:

$$A = 0.25 \times 0.30 = 0.075 \text{ m}^2$$

Usando a regra da mão direita, vemos que o momento magnético  $\vec{m}$  da espira é paralelo ao plano  $xy$  e tem o sentido indicado na figura seguinte:



portanto, o versor normal é:

$$\vec{e}_n = -\sin 60^\circ \vec{e}_x + \cos 60^\circ \vec{e}_y = -0.866 \vec{e}_x + 0.5 \vec{e}_y$$

e o momento magnético da espira é:

$$\vec{m} = 0.075 \times 2.5 (-0.866 \vec{e}_x + 0.5 \vec{e}_y) = (-0.162 \vec{e}_x + 0.0938 \vec{e}_y) \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

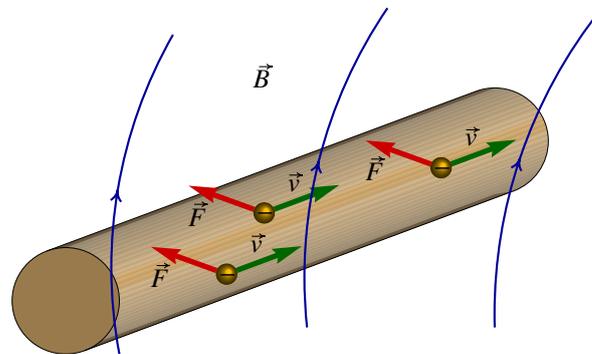
O torque é igual ao produto vetorial entre o momento magnético e o campo magnético:

$$\vec{\tau} = (-0.162 \vec{e}_x + 0.0938 \vec{e}_y) \times (0.2 \vec{e}_y) = -32.4 \vec{e}_z \text{ (mN} \cdot \text{m)}$$

A bobina roda até o seu momento magnético apontar na direção e sentido do campo magnético. Consequentemente, a bobina roda à volta dum eixo paralelo ao eixo dos  $z$ , que passa pelo seu centro de massa, de forma a que o ângulo inicial de  $30^\circ$  aumente até  $90^\circ$ .

## 8.4. Força magnética sobre partículas com carga

A força produzida pelo campo magnético sobre um fio com corrente é o resultado das forças que atuam sobre cada uma das cargas de condução, devido ao seu movimento.

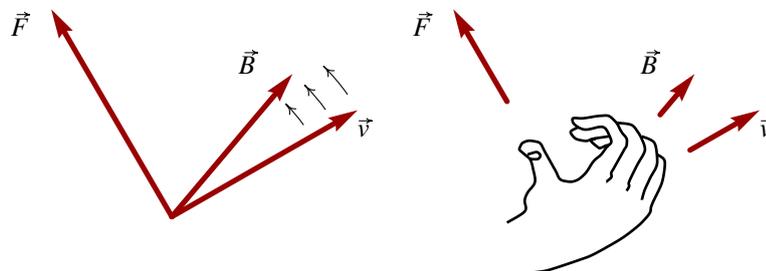


**Figura 8.6.:** Força magnética sobre as cargas de condução, num condutor com corrente.

Quando não há corrente, a velocidade média das cargas de condução é nula e a força magnética resultante também é nula. Quando a corrente aumenta no condutor, a velocidade média das cargas de condução aumenta em proporção direta à corrente, e a força sobre cada carga de condução também aumenta em proporção direta. A força magnética sobre cada carga de condução e, de forma geral, a força magnética sobre qualquer partícula com carga  $q$  é dada pela equação:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (8.8)$$

em que  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula e  $\vec{B}$  é o campo magnético no ponto onde se encontra a partícula. Assim, a força magnética é diretamente proporcional ao módulo da velocidade da partícula e à sua carga. Se a velocidade for paralela ao campo, a força será nula, e se a velocidade for perpendicular ao campo, a força será máxima. A força magnética é perpendicular à velocidade da partícula e perpendicular ao campo. Se a carga da partícula for positiva, o sentido da força é dado pela regra da mão direita, desde  $\vec{v}$  até  $\vec{B}$  (ver figura 8.7), ou no sentido oposto, se a carga da partícula for negativa.

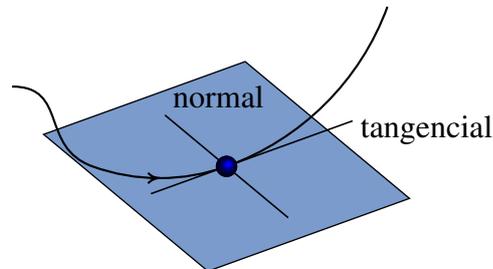


**Figura 8.7.:** A força magnética sobre uma partícula é perpendicular à sua velocidade e a campo magnético, no sentido da regra da mão direita.

Numa região onde existem campos elétrico,  $\vec{E}$ , e magnético,  $\vec{B}$ , a força sobre uma partícula com carga  $q$  e velocidade  $\vec{v}$  é

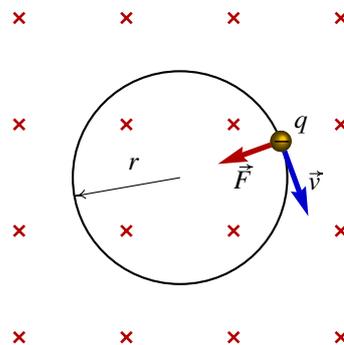
$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (8.9)$$

Em geral, a força resultante poderá ter componentes nas direções tangencial e normal (ver figura fig:fig14-3). A força magnética é sempre no plano perpendicular à direção tangencial. Qualquer mudança de energia cinética é devida ao campo elétrico já que o campo magnético não realiza nenhum trabalho, por produzir força sempre perpendicular ao deslocamento.



**Figura 8.8.:** Direções tangencial e normal à trajetória de uma partícula.

As linhas de campo magnético de um campo magnético uniforme são retas paralelas e costumam desenhar-se equidistantes entre si, para indicar a uniformidade do campo. Num plano perpendicular ao campo uniforme, as linhas são desenhadas como pontos, se o campo apontar para fora do desenho, ou por meio de x, se o campo apontar para dentro do desenho, como no caso seguinte; por exemplo, na figura 8.9 está representado um campo magnético uniforme, que aponta para dentro da folha.



**Figura 8.9.:** Movimento de uma partícula com carga negativa dentro de um campo magnético uniforme, apontando para dentro da folha.

Consideremos uma partícula, com carga  $q$ , que se desloca dentro de um campo magnético uniforme, sem existirem outras forças para além da força magnética. Se a velocidade inicial da partícula for perpendicular ao campo, o módulo da força magnética será  $qvB$ . Como em cada instante a força é perpendicular à velocidade, e o módulo da velocidade permanece constante (a força magnética não altera a energia cinética), o resultado será um movimento circular uniforme em que a força centrípeta,  $mv^2/r$  é a força magnética  $qvB$ . Consequentemente, o raio da trajetória e a velocidade angular do movimento serão:

$$\boxed{r = \frac{mv}{qB}} \quad \boxed{\omega = \frac{qB}{m}} \quad (8.10)$$

As partículas com carga negativa rodarão em sentido oposto às partículas com carga positiva. No caso da figura 8.9, a carga da partícula é negativa.

Se a velocidade inicial não for perpendicular ao campo, a componente da velocidade no sentido do campo permanece constante, enquanto que a velocidade perpendicular roda, com a velocidade angular dada pela equação 8.10. A sobreposição do deslocamento uniforme, na direção do campo, e o movimento circular uniforme no plano perpendicular, produz um movimento **helicoidal** que segue as linhas de campo magnético. O raio da hélice será menor nas regiões onde o campo for mais forte, e as linhas de campo estiverem mais perto umas das outras.

Um par de campos elétrico e magnético, uniformes e perpendiculares entre si podem ser usados para “filtrar” partículas com uma determinada velocidade. A figura 8.10 mostra um **filtro de velocidades**, formado por um campo elétrico uniforme que aponta para cima, e um campo magnético uniforme que aponta para fora do papel.

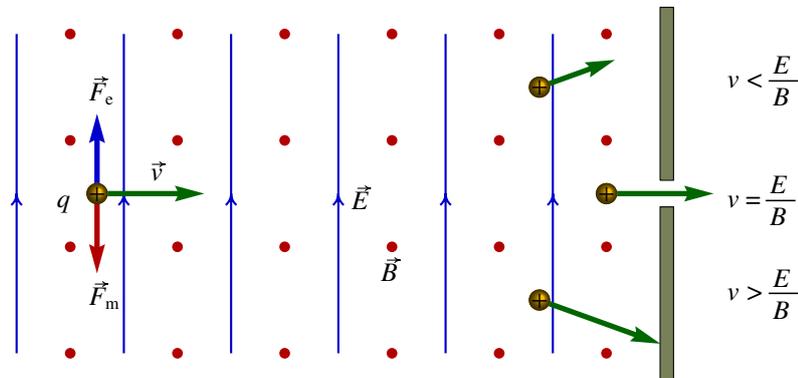


Figura 8.10.: Filtro de velocidades

Uma partícula com carga positiva  $q$  e velocidade para a direita sentirá uma força elétrica  $q\vec{E}$  para cima, e uma força magnética de módulo  $qvB$ , para baixo. Consequentemente, a força resultante será nula se o módulo da velocidade for exatamente igual a

$$v = \frac{E}{B} \quad (8.11)$$

Coloca-se uma barreira no filtro, de maneira que unicamente as partículas que se deslocam em linha reta (com velocidade  $E/B$ ) logrem ultrapassar a barreira.

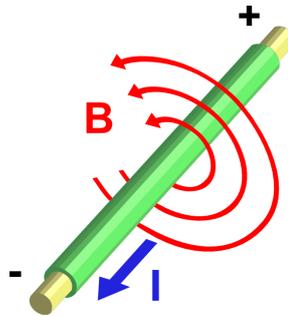
## 8.5. Campo magnético de um fio com corrente

O campo magnético produz forças sobre os condutores com corrente e os condutores com corrente também produzem campos magnéticos. Um cabo que transporta corrente produz linhas de campo magnético à sua volta.

O campo produzido por um condutor com corrente pode ser calculado por meio da lei de Biot-Savart, que não vamos estudar aqui. No caso do campo elétrico, vimos que em alguns casos simples podia ser usada a lei de Gauss para calcular o campo. A lei análoga à lei de Gauss, para o campo magnético, é a **lei de Ampère**, que estabelece que *em qualquer curva fechada, o integral de linha do campo magnético é proporcional à corrente elétrica que passa através da curva*:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_{\text{int}} \quad (8.12)$$

onde  $C$  é uma curva fechada,  $k_m$  é uma **constante magnética**, e  $I_{\text{int}}$  é a corrente total que passa por dentro da curva  $C$ . Para calcular a corrente  $I_{\text{int}}$  somam-se as correntes dos fios que passem pelo interior de  $C$ , dando sinal positivo às correntes que passem no sentido da regra da mão direita, em relação à direção em que é percorrida a curva  $C$  no integral, e dando sinal negativo às correntes no sentido oposto.



**Figura 8.11.:** Campo magnético produzido por um cabo com corrente.

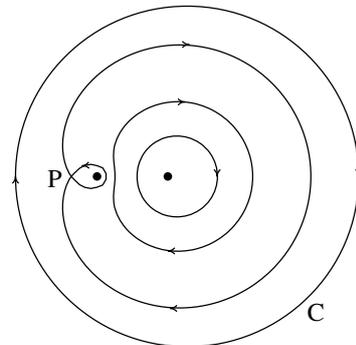
No vácuo, o valor da constante magnética é

$$k_m = 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \quad (8.13)$$

em unidades de G·cm/A, o valor da constante é 0.1. Num meio diamagnético,  $k_m$  deverá ser substituída por  $\mu/(4\pi)$ , onde  $\mu$  é a **permeabilidade magnética** do meio.

### Exemplo 8.2

A figura representa as linhas de campo magnético de dois fios retilíneos (perpendiculares à folha) com correntes  $I_1$  e  $I_2$ . A corrente no fio do lado esquerdo é  $I_1 = 3 \text{ A}$ . Sabendo que a distância entre os dois fios é 6 cm, e a distância entre o fio do lado esquerdo e o ponto P é de 2 cm, calcule  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r}$  ao longo do círculo C indicado no desenho.



**Resolução.** O integral do campo magnético, em qualquer percurso fechado, pode ser calculado usando a lei de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_C$$

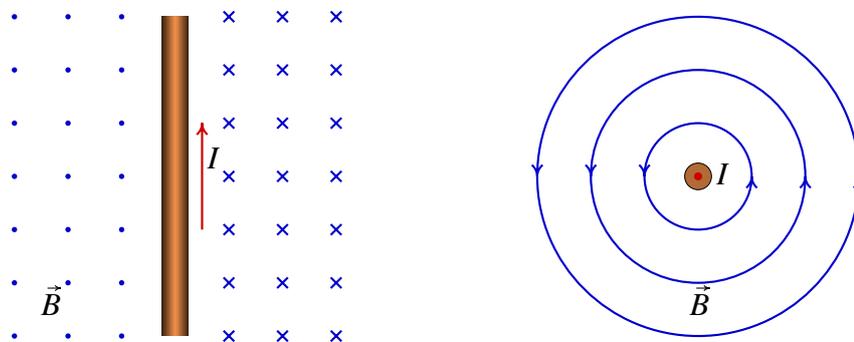
A corrente  $I_C$  através do círculo  $C$  é igual a  $I_2 - I_1$ , já que o desenho das linhas de indução mostra que  $I_2$  é no sentido positivo de  $C$  (para dentro da folha) e  $I_1$  é no sentido oposto. Para calcular  $I_1$  usamos o facto de o campo total ser nulo no ponto  $P$ ; isso implica que no ponto  $P$  os campos produzidos pelos dois fios têm o mesmo módulo. Como o módulo do campo de cada fio é diretamente proporcional à corrente e inversamente proporcional à distância, e como as distâncias dos fios até  $P$  são 2 cm e 8 cm, temos a seguinte relação:

$$\frac{I_1}{2} = \frac{I_2}{8}$$

e, portanto,  $I_2$  é igual a 12 A e  $I_C = 9$  A. Se admitirmos que não existe nenhum meio à volta dos fios,  $k_m$  será a constante magnética do vácuo e obtemos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi \times 10^{-7} \times 9 = 11.3 \frac{\mu\text{N}}{\text{A}}$$

Um caso em que a lei de Ampère é útil para calcular o campo, é no caso de um fio retilíneo, muito comprido. Consideremos uma curva  $C$  que é uma circunferência de raio  $r$ , perpendicular ao fio, e com centro no eixo do fio. Devido à simetria do sistema, as linhas de campo deveriam ser, ou na direção radial, ou tangentes à circunferência  $C$ ; se fossem na direção radial, o integral de linha do campo ao longo de  $C$  seria nulo, que não é possível, devido à lei de Ampère. A figura 8.12 mostra as linhas de campo magnético do fio retilíneo, vistas de lado (parte esquerda da figura) e vistas de cima (na parte direita da figura):



**Figura 8.12.:** Linhas de campo magnético de um fio retilíneo com corrente.

Como o campo magnético é tangente ao à curva  $C$ , e com módulo constante, o integral de linha do campo será igual a:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = B \oint_C ds = 2\pi r B \quad (8.14)$$

De acordo com a lei de Ampère, o integral também deverá ser igual a  $4\pi k_m I$ . Assim, o campo magnético ao longo da curva  $C$  deverá ter módulo

$$B_{\text{fio reto}} = \frac{2k_m I}{r} \quad (8.15)$$

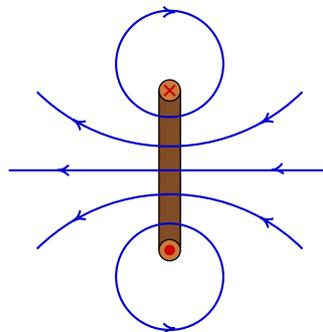
onde  $r$  é a distância desde o eixo do fio, até o ponto onde se calcula o campo. A direção do campo é a direção das circunferências perpendiculares ao fio, com centro no seu eixo, e o sentido das linhas de campo obtém-se usando a regra da mão direita, em relação ao sentido da corrente.

O campo de um sistema com várias correntes obtém-se somando vetorialmente os campos produzidos por cada corrente. Para um sistema de  $n$  fios paralelos, a equação 8.15 conduz à seguinte expressão para as componentes do campo, no plano perpendicular aos fios:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{-2k_m I_i (y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right] \vec{e}_x + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2k_m I_i (x - x_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right] \vec{e}_y \quad (8.16)$$

onde  $I_i$  é a corrente no fio número  $i$ , com sinal positivo se for no sentido positivo do eixo dos  $z$ , ou sinal negativo no caso contrário, e  $(x_i, y_i)$  são as coordenadas do ponto onde o fio corta o plano  $xy$ .

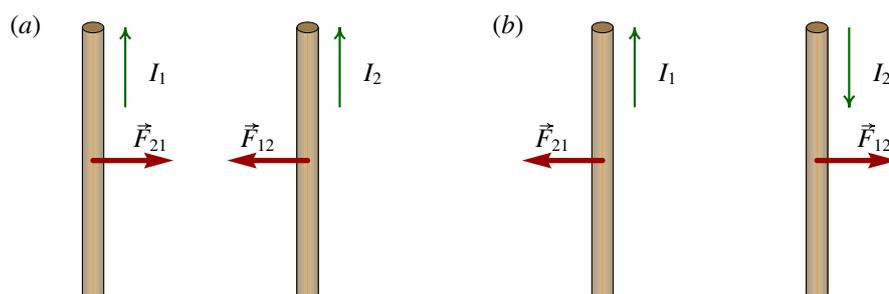
Quando o fio não for retilíneo, já não existirá simetria numa circunferência perpendicular ao fio, e a lei de Ampère não permite calcular o campo; no entanto, as linhas de campo são parecidas com as linhas do fio retilíneo. Por exemplo, a figura 8.13 mostra as linhas de campo de uma espira circular com corrente, no plano perpendicular que corta a espira ao meio. As linhas são parecidas com as linhas de campo de dois fios perpendiculares ao plano, com correntes opostas.



**Figura 8.13.:** Campo magnético produzido por uma espira com corrente.

## 8.6. Força entre condutores com corrente

Cada condutor com corrente cria um campo magnético que produz forças magnéticas sobre outros condutores com corrente. Assim, entre dois condutores com corrente existem forças magnéticas. Calculando o sentido do campo produzido por cada condutor, e o sentido da força que esse campo exerce sobre o segundo condutor, conclui-se que a força entre dois fios com correntes no mesmo sentido é atrativa, e a força entre dois fios com correntes em sentidos opostos é repulsiva.



**Figura 8.14.:** Forças magnéticas entre dois fios com corrente.

Se os dois fios condutores forem retilíneos e paralelos, com comprimento  $L$  muito maior que a distância  $r$  entre eles, o campo de cada um pode ser calculado pela equação obtida no fim da seção anterior; por exemplo, o campo do fio 1 nos pontos onde se encontra o fio 2 tem módulo:

$$B_1 = \frac{2k_m I_1}{r} \quad (8.17)$$

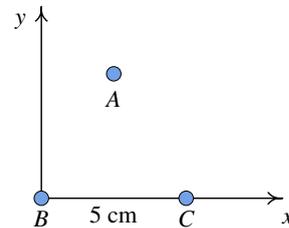
e a força que esse campo exerce sobre o fio 2 obtém-se a partir do produto vetorial  $\vec{I}_2 \times \vec{B}_1 L$ . Assim, o módulo da força que o fio 1 exerce sobre o fio 2 é:

$$F_{12} = \frac{2k_m L I_1 I_2}{r} \quad (8.18)$$

## Perguntas

- Dois fios retilíneos e paralelos, afastados 6 cm entre si, transportam correntes de 190 mA, em sentidos opostos. Calcule o módulo do campo magnético no ponto P no meio entre os dois fios.
  - 1.25  $\mu\text{T}$
  - 0
  - 3  $\mu\text{T}$
  - 2.5  $\mu\text{T}$
  - 1.5  $\mu\text{T}$
- Se o campo magnético aponta para o norte, em que direção será a força magnética sobre uma partícula com carga positiva que se desloca para o este?
  - Para cima.
  - Para o oeste.
  - Para o sul.
  - Para baixo.
  - Para o este.

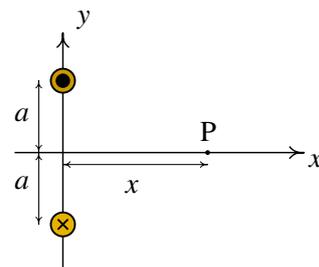
3. Uma partícula alfa é formada por dois prótons mais dois nêutrons. Se uma partícula alfa se deslocar com velocidade igual a  $6.15 \times 10^5$  m/s, numa direção perpendicular a um campo magnético com módulo  $B = 0.27$  T, qual será o valor da força magnética sobre a partícula?
- A.  $5.3 \times 10^{-14}$  N  
 B.  $3.3 \times 10^5$  N  
 C.  $2.7 \times 10^{-14}$  N  
 D. zero  
 E.  $4.8 \times 10^5$  N
4. Um segmento de fio condutor retilíneo, que transporta uma corrente  $I$ , encontra-se numa região onde existe um campo magnético uniforme, não nulo. Se a força magnética sobre o fio for nula, qual das seguintes afirmações é verdadeira?
- A. O campo é paralelo ao fio.  
 B. O campo é perpendicular ao fio.  
 C. O campo é variável.  
 D. É uma situação impossível.  
 E. O campo é conservativo.
5. Três fios retilíneos, compridos e paralelos, transportam todos uma corrente de 2 mA no mesmo sentido (perpendicular à folha). A distância entre quaisquer dois fios vizinhos é 5 cm. Calcule o ângulo que a força magnética sobre o fio B faz com o semi-eixo positivo dos  $x$ .



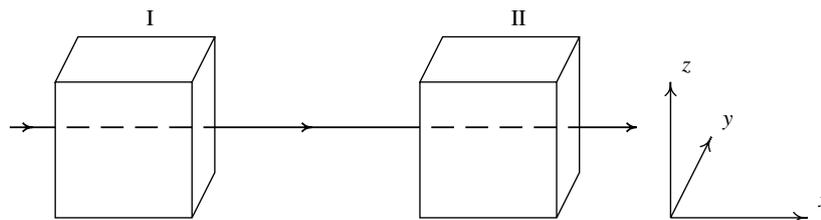
- A.  $27^\circ$   
 B.  $60^\circ$   
 C.  $90^\circ$   
 D.  $45^\circ$   
 E.  $30^\circ$

## Problemas

1. Um próton "navega" na atmosfera solar, a uma velocidade de  $0.15c$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo ( $2.998 \times 10^8$  m/s). O próton atravessa um campo magnético uniforme de 0,12 T, formando um ângulo de  $25^\circ$ . Calcule o raio do cilindro que envolve a órbita helicoidal do próton (use o valor da massa do próton dado no apêndice B e admita que com a velocidade  $0.15c$  a mecânica não-relativista ainda é uma boa aproximação).
2. Considere dois fios de cobre, retilíneos e paralelos, de 60 cm de comprimento, distanciados de 9 cm e com raios de 2 mm e 3 mm. Calcule o valor da força magnética entre os fios quando cada um deles for ligado a uma fem de 1.5 V. (Use o valor da resistividade do cobre à temperatura ambiente:  $17 \text{ n}\Omega \cdot \text{m}$ .)
3. Na figura está representado esquematicamente um corte transversal de dois fios compridos e paralelos, perpendiculares ao plano  $xy$ , cada um com uma corrente  $I$ , em sentidos opostos. (a) Represente os vetores do campo magnético de cada fio e o campo resultante no ponto P. (b) Deduza a expressão para o módulo do campo de magnético em qualquer ponto sobre o eixo  $x$ , em função de  $x$ .

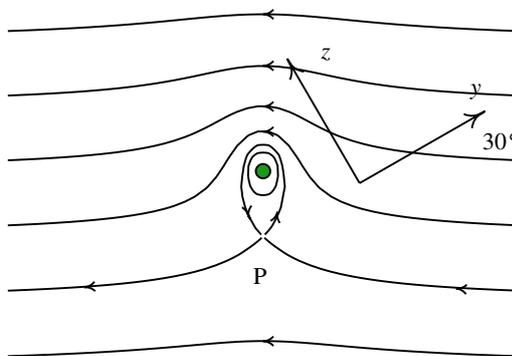


4. Um feixe de prótons desloca-se com velocidade constante  $\vec{v}$ , segundo o eixo dos  $x$ , atravessando duas regiões, I e II, caracterizadas do seguinte modo: em I, existe um campo magnético,  $\vec{B}_1$  e em II, coexistem um campo magnético,  $\vec{B}_2$ , e um campo elétrico,  $\vec{E} = E\vec{z}$ . Todos os campos são uniformes nas regiões em que foram definidos e anulam-se fora delas. O peso dos prótons não é significativo. Quais as condições a que devem obedecer os campos  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$  para que o feixe não sofra qualquer perturbação no seu movimento, enquanto atravessa duas regiões? Se em vez de prótons, fosse um feixe de elétrons, as condições estabelecidas manter-se-iam?

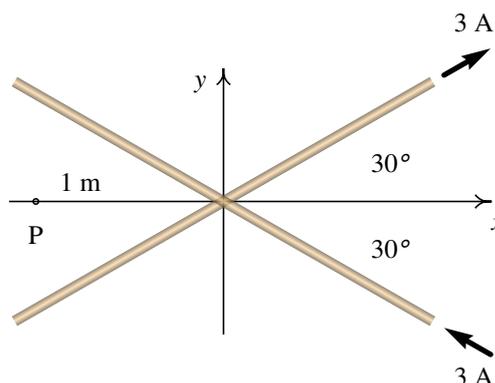


5. Num filtro de velocidades os módulos dos campos magnético e elétrico são 0.1 T e 0.2 MV/m, respetivamente. (a) Qual deve ser a velocidade de uma partícula para que não seja desviada ao passar pelos campos? (b) Qual é a energia que deve ter um próton para passar através do filtro? (c) E qual a energia de um elétron que sai do filtro? (os valores das massas do elétron e do próton encontram-se no apêndice B).
6. Considere uma bobina circular de 400 espiras e raio 0.1 cm, num campo magnético uniforme de 0.3 T. Calcule o torque máximo na bobina quando a corrente for 92 mA.

7. A figura mostra as linhas de campo magnético de um fio com corrente, dentro de um campo magnético uniforme  $\vec{B}_{\text{ext}}$ ; o fio é perpendicular à folha e os eixos  $y$  e  $z$  foram escolhidos sobre o plano da folha. (a) Escreva o versor na direção do campo externo, usando o sistema de eixos dado. (b) Escreva o vetor unitário na direção da corrente no fio. (c) Calcule e represente o vetor unitário na direção da força sobre o fio. (d) Considerando que  $I = 0.5$  A e se a força sobre o fio, por unidade de comprimento, for de  $2 \times 10^{-5}$  N/m, calcule a distância até ao ponto P.



8. Os dois fios representados na figura são muito compridos e cada um transporta uma corrente de 3 A. Um dos fios encontra-se sobre o plano  $xy$  e o outro se encontra num plano paralelo a  $xy$  mas 5 cm acima deste ( $z = 5$ ). Calcule o campo magnético total no ponto P com coordenadas  $x = -1$  m,  $y = z = 0$ .



## 9. Indução eletromagnética

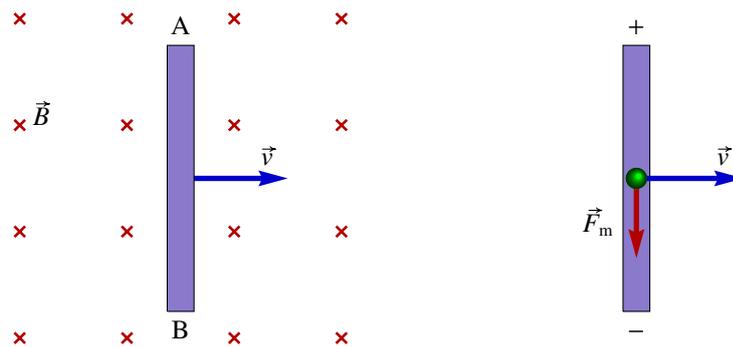


A energia eólica é uma das fontes de energia renováveis que estão a ser utilizadas para reduzir a contaminação produzida pelos combustíveis fósseis. Portugal é um dos países em que a energia eólica corresponde a uma percentagem mais elevada da energia elétrica total, com aproximadamente 9%. Independentemente do tipo de combustível ou fonte de energia usada para gerar energia elétrica, em quase todos os casos é gerada energia mecânica de rotação que é logo usada para gerar eletricidade. O princípio que permite transformar a energia mecânica de rotação em eletricidade é a indução eletromagnética. Vimos no capítulo anterior que um campo magnético faz rodar uma bobina com corrente; a indução eletromagnética é o efeito oposto: numa bobina que se faz rodar dentro de um campo magnético é induzida uma corrente elétrica.

## 9.1. Campo elétrico induzido

Consideremos uma barra condutora em movimento dentro de um campo magnético uniforme,  $\vec{B}$ , como se mostra na figura 9.1. Sobre cada partícula com carga  $q$  dentro do condutor atua uma força magnética:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (9.1)$$



**Figura 9.1.:** Barra condutora em movimento, dentro de um campo magnético. A força magnética faz acumular cargas opostas nos extremos da barra.

Essa força magnética faz deslocar as cargas de condução no condutor; na situação da figura 9.1, ficará um excesso de cargas negativas no extremo inferior da barra, e um excesso de cargas positivas no extremo superior, independentemente do sinal das cargas de condução.

Mas se analisarmos o problema do ponto de vista do referencial  $S'$ , que se desloca com o condutor, nesse referencial o condutor está em repouso e, portanto, não existe nenhuma força magnética sobre as cargas. Como se explica acumulação de cargas nos dois extremos da barra?

O problema está em que a velocidade é uma grandeza relativa, diferente em diferentes referenciais; isso implica que, para que a equação 9.1 seja correta, é preciso alguma condição adicional que defina exclua todos os referenciais, excepto um onde a equação é válida. A segunda lei de Newton implica que as força deve ser invariante, devido a que a aceleração e a massa são invariantes.

O problema resolve-se admitindo que os campos elétrico e magnético não são invariantes. Dois observadores em dois referenciais diferentes observam diferentes valores para os campos elétrico e magnético, mas observam a mesma força eletromagnética:

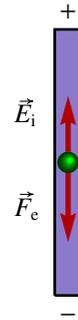
$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (9.2)$$

A força eletromagnética é invariante. A equação 9.1 é válida unicamente num referencial em que o campo elétrico seja nulo. No referencial que se desloca com a barra na figura 9.1,

deverá aparecer um campo elétrico **induzido**:

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} \quad (9.3)$$

que produz uma força elétrica igual à força magnética observada no referencial em que a barra se desloca com velocidade relativa  $\vec{v}$  (figura 9.2).



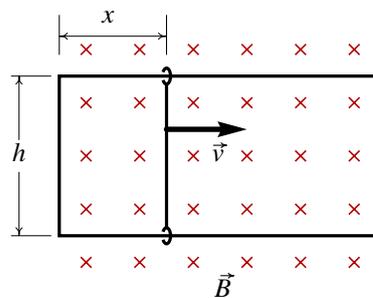
**Figura 9.2.:** Campo elétrico induzido pelo movimento dentro do campo magnético.

É como se existisse uma *fem* induzida, no condutor, igual a diferença de potencial entre os extremos. Se o comprimento da barra for  $L$ , a *fem* induzida será:

$$\varepsilon_i = L |\vec{v} \times \vec{B}| \quad (9.4)$$

### Exemplo 9.1

Uma barra condutora desliza sobre dois trilhos metálicos horizontais, unidos numa extremidade como se mostra na figura. A distância  $h$  é igual a 3.3 cm e no instante  $t = 0$  a barra encontra-se a uma distância  $x = 2.2$  cm da extremidade dos trilhos. Em  $t > 0$  a velocidade da barra é uniforme com módulo  $v = 3.5$  cm/s, no sentido indicado na figura e mantendo o contato elétrico com os trilhos. (a) Sabendo que os trilhos e a barra são fios cilíndricos de cobre com diâmetro de 1.2 mm, calcule a resistência total do circuito em função de  $t$ , para  $t > 0$  (admita que a temperatura é de 20°C). (b) Se existir um campo magnético externo, constante e uniforme, com módulo  $B = 36$  G, no sentido indicado na figura, calcule a corrente no circuito em função do tempo, para  $t > 0$ .



**Resolução.** (a) O circuito neste caso é um retângulo com arestas  $x$  e  $h$ . O comprimento total do fio que constitui o circuito é

$$L = 2x + 2h$$

A distância  $x$  aumenta com o tempo  $t$  segundo a equação:

$$x = x_0 + vt$$

onde  $x_0 = 2.2$  cm e  $v = 3.5$  cm/s. A área da seção transversal do fio é  $A = \pi r^2$ , onde  $r = 0.06$  cm é o raio do fio. A resistividade do cobre a  $20^\circ\text{C}$  é  $\rho = 17 \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{cm}$  e a resistência do fio que forma o circuito é

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{2\rho(h + x_0 + vt)}{\pi r^2} = \frac{34 \times 10^{-7}(5.5 + 3.5t)}{\pi \times 0.06^2} = 1.65 + 1.05t$$

em  $\text{m}\Omega$ , se  $t$  for medido em segundos.

(b) Na barra em movimento existe uma *fem* induzida:

$$\varepsilon_i = h |\vec{v} \times \vec{B}| = Bvh$$

a intensidade da corrente no circuito será

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{Bvh}{R}$$

passando para unidades SI, temos:

$$I = \frac{36 \times 10^{-4} \times 3.5 \times 10^{-2} \times 3.3 \times 10^{-2}}{(1.65 + 1.05t) \times 10^{-3}} = \frac{4.16}{1.65 + 1.05t}$$

em mA, se  $t$  for medido em segundos.

## 9.2. Gerador de Faraday

Um tipo de gerador de tensão contínua, inventado por Faraday, consiste num disco condutor, de raio  $R$ , que roda com velocidade angular  $\omega$  dentro de um campo magnético perpendicular a ele (figura 9.3).

No referencial que roda com o disco, existe um campo elétrico induzido na direção radial, com módulo igual a:

$$E_i = B\omega r \quad (9.5)$$

A diferença de potencial entre os pontos P e Q na figura 9.3 é:

$$V_Q - V_P = \int_0^R E_i dr = \frac{1}{2} B\omega R^2 \quad (9.6)$$

Colocando duas escovar em contato com os pontos P e Q obtem-se uma fonte de força eletromotriz.

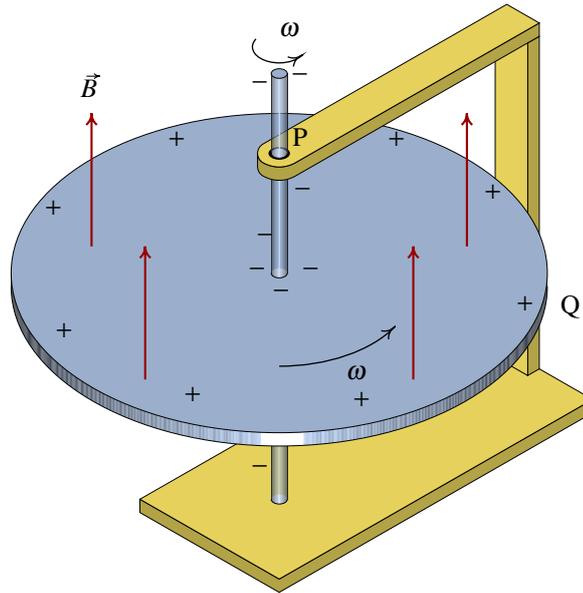


Figura 9.3.: Gerador de Faraday.

### 9.3. Lei de Faraday

A equação 9.3 para o campo elétrico induzido não é apenas para condutores em movimento, mas também para qualquer referencial que se desloque com velocidade  $\vec{v}$  em relação a um sistema onde as linhas de campo aparecem fixas no espaço. Desde o ponto de vista desse referencial, as linhas de campo deslocam-se com velocidade  $-\vec{v}$ . Portanto, sempre que houver uma alteração das linhas de campo magnético, aparecerá um campo elétrico induzido.

Outra situação que existe alteração das linhas de campo magnético é quando o campo magnético é variável; nesse caso também deverá ser induzido um campo elétrico.

Uma expressão geral que inclui as situações em que o referencial se desloca em relação ao campo, e o campo magnético variável, é a **lei de Faraday**:

Numa espira condutora  $C$ , quando o fluxo magnético  $\Phi_m$  através da superfície delimitada por  $C$  muda, aparece uma força eletromotriz induzida ao longo da espira, igual a:

$$\boxed{\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}} \quad (9.7)$$

O **fluxo magnético**  $\Phi_m$  através da superfície  $S$  delimitada pela espira, define-se de forma análoga ao fluxo do campo elétrico. Se o campo for uniforme sobre o plano da espira, com módulo constante  $B$  e formando um ângulo  $\theta$  com o versor perpendicular à espira, o fluxo magnético é:

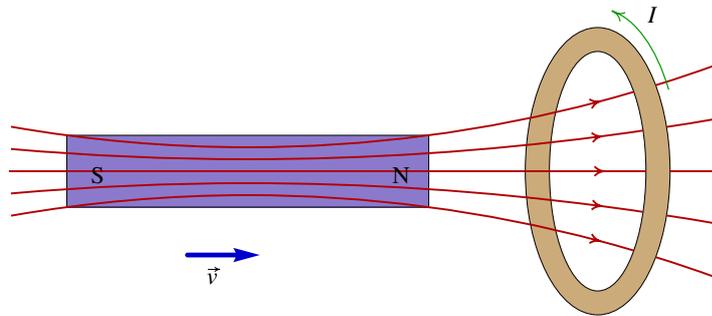
$$\boxed{\Phi_m = AB \cos \theta} \quad (9.8)$$

onde  $A$  é a área da espira. Se o campo não for uniforme, é preciso dividir a espira em pequenos elementos diferenciais e somar todos os fluxos infinitesimais, obtendo-se um integral de superfície.

O vetor perpendicular à espira,  $\vec{e}_n$ , pode ser escolhido num lado da superfície ou no outro; o vetor que for escolhido, definirá o sentido positivo da corrente na espira, usando a lei da mão direita. O sinal obtido no lado direito da equação 9.7 indica o sentido do campo induzido na espira, tendo em conta que o sentido positivo é o que segue a regra da mão direita em relação ao vetor  $\vec{e}_n$ .

O sentido do campo induzido pode também ser determinado usando a **lei de Lenz**: A força eletromotriz e o campo induzido são sempre no sentido que produz um campo magnético induzido que contraria a variação do fluxo magnético externo.

Igual que no caso do campo elétrico ou qualquer fluido incompressível, o fluxo será o mesmo através de todas as superfícies por onde passem as mesmas linhas de campo. As linhas que passam pela fronteira da superfície delimitam um tubo de fluxo constante.



**Figura 9.4.:** Um ímã em movimento junto de uma espira condutora,

Um exemplo de aplicação da lei de Faraday é o caso de um ímã que se aproxima de um anel condutor, com velocidade  $v$ . O movimento do ímã implica variação do fluxo magnético através do anel.

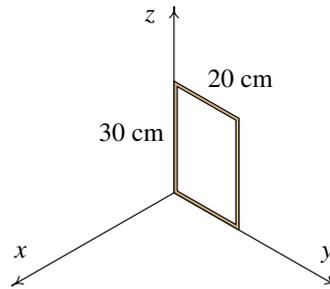
No instante que se mostra na figura 9.4, o fluxo magnético no anel, é no sentido de esquerda para direita, e está a aumentar. Aparecerá uma corrente induzida no anel, que produza fluxo magnético de direita para esquerda, para contrariar o aumento do fluxo. Assim, o campo magnético induzido aponta para a esquerda, o que implica que a corrente e a fem induzidas no anel são no sentido que se mostra na figura. É como se tivesse sido ligada uma pilha no anel.

### Exemplo 9.2

Uma espira condutora retangular com arestas de 20 cm e 30 cm encontra-se sobre o plano  $yz$ , com um vértice na origem, como se mostra na figura. A partir do instante  $t = 0$  aparece na região onde se encontra a espira um campo magnético variável com componentes (unidades SI):

$$B_x = 6t^2 - 4 \quad B_y = 5t^3 \quad B_z = 0$$

(a) Calcule a fem induzida na espira, em função do tempo  $t$ , a partir do instante  $t = 0$ . (b) Diga (justificando) qual é o sentido da corrente induzida na espira.



**Resolução.** (a) Como o campo é uniforme podemos usar a equação 9.8. A espira é perpendicular ao eixo dos  $x$ ; podemos escolher o versor normal à espira igual a  $\vec{e}_x$ ; assim, o produto  $B \cos \theta$  será a componente  $x$  do campo  $\vec{B}$  e o fluxo magnético através da espira será:

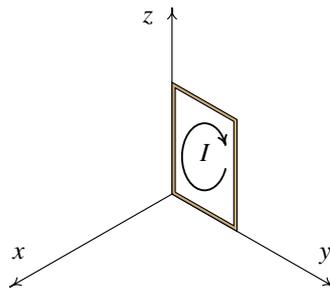
$$\Phi_m = \Delta y \Delta z B_x = 0.06 (6t^2 - 4)$$

A fem induzida calcula-se usando a lei de Faraday:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -0.72t$$

(em volts, se  $t$  for dado em segundos).

(a) Como  $t$  é positivo, o valor de  $\varepsilon_i$  calculado na alínea anterior será sempre negativo. Isso quer dizer que a corrente induzida será no sentido oposto do sentido usado para definir o versor normal à espira. A escolha de  $\vec{e}_n = \vec{e}_x$  implica que estávamos a percorrer a espira em sentido anti-horário, vista desde o semieixo positivo dos  $x$ . Consequentemente, a corrente induzida é no sentido dos ponteiros do relógio:

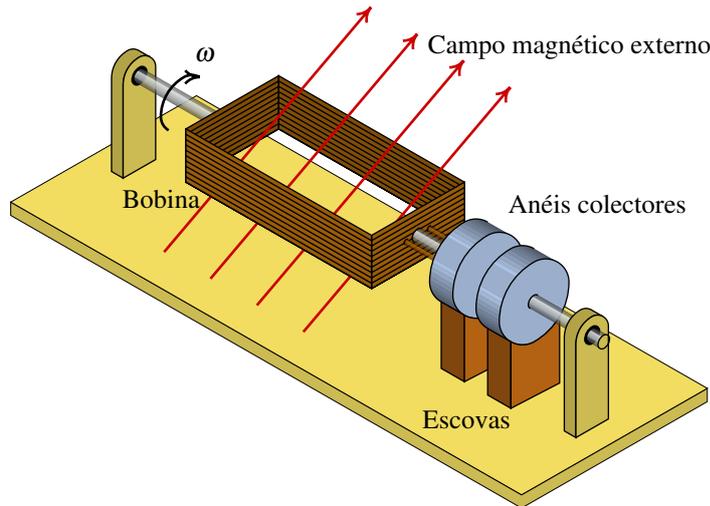


Outra forma de obter o sentido da corrente consiste em observar que o campo  $B_x$  inicialmente aponta no sentido negativo do eixo dos  $x$ , mas está sempre a aumentar no sentido positivo do eixo dos  $x$ . O campo induzido deverá contrariar esse aumento, apontando no sentido negativo do eixo dos  $x$ . Pela regra da mão direita, um campo magnético induzido no sentido negativo do eixo dos  $x$  implica corrente induzida em sentido dos ponteiros do relógio.

---

## 9.4. Gerador de tensão alternada

Um gerador de tensão alternada (figura 9.5), consiste numa bobina que se faz rodar dentro de um campo magnético; o fio onde começa a bobina está soldado a um anél condutor e o fim do fio, depois de ser enrolado na bobina, solda-se a outro anél condutor; esses dois anéis mantêm o contato com duas escovas, enquanto a bobina roda, de forma que a diferença de potencial entre as escovas é igual à diferença de potencial na bobina toda.



**Figura 9.5.:** Gerador de tensão alternada.

O fluxo através da bobina é:

$$\Phi_m = BA \cos \theta \quad (9.9)$$

onde  $A$  é a área da bobina,  $B$  o campo médio, e  $\theta$  o ângulo entre o campo e a normal à bobina.

Se a bobina roda com velocidade angular constante,  $\omega$ , o ângulo  $\theta$ , em função do tempo, é dado por  $\omega t + \theta_0$ . Assim, a derivada do fluxo magnético, em função do tempo, será igual a:

$$\Delta V = V_{\text{máx}} \sin(\omega t + \theta_0) \quad (9.10)$$

onde  $V_{\text{máx}} = NBA \omega$ . A expressão 9.10 dá a diferença de potencial entre as duas escovas condutoras, em função do tempo e é designada **tensão alternada**. A diferença de potencial oscila entre um valor máximo  $V_{\text{máx}}$ , positivo, e um valor mínimo negativo  $-V_{\text{máx}}$ . A frequência da tensão alternada,  $f = \omega/(2\pi)$ , é o número de oscilações por unidade de tempo..

O gerador de tensão alternada, também denominado alternador, usa-se para transformar energia mecânica em energia elétrica. A fonte da energia mecânica, que faz rodar a bobina, pode ser o vento, nas centrais de energia eólica, a corrente de água, nas centrais hidroelétricas, o fluxo de vapor de água evaporada por combustão de carvão, o movimento do motor, no alternador usado para recarregar a bateria num automóvel, etc.

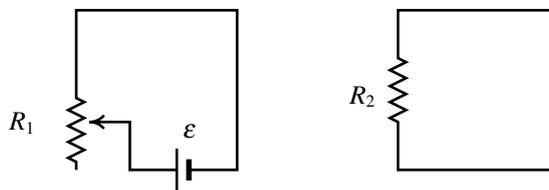
É importante regular a velocidade da bobina, de forma a manter uma velocidade angular constante, para que a tensão elétrica produzida tenha uma frequência constante. É por isso que as aspas num moinho de vento de uma estação eólica rodam lentamente e com velocidade angular constante. Existe um mecanismo mecânico usado para regular essa velocidade.

## 9.5. Indutância

A corrente num circuito produz campo magnético e, portanto, fluxo magnético. Assim, qualquer variação da corrente conduzirá a forças eletromotrizes induzidas no circuito.

Se, por exemplo, fecharmos um interruptor num circuito de corrente contínua, a corrente não aumenta instantaneamente desde zero até um valor final, devido à indutância do circuito. A tendência da corrente a aumentar bruscamente será contrariada por uma corrente induzida oposta, que regula o aumento da corrente de forma gradual. Igualmente, quando se abrir o interruptor a corrente não passará a ser nula de forma instantânea mais de forma gradual.

Imaginemos dois circuitos, um ao lado do outro (figura 9.6). No primeiro circuito está ligada uma pilha que produz uma corrente, existindo uma resistência variável que permite alterar a intensidade dessa corrente. No segundo circuito não está ligada nenhuma fonte.



**Figura 9.6.:** Indutância mútua entre dois circuitos.

A corrente no circuito 1 (lado esquerdo) produz fluxo magnético dentro do circuito 2, que deverá ser diretamente proporcional à corrente  $I_1$ , que produz esse campo magnético:

$$\Phi_2 = -MI_1 \quad (9.11)$$

onde  $M$  é uma constante chamada **indutância mútua**, que depende da forma dos circuitos e da distância entre eles.

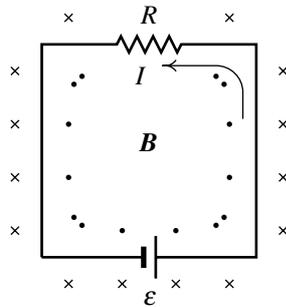
A variação da corrente no circuito 1 induz uma força eletromotriz no circuito 2:

$$\varepsilon_2 = M \frac{dI_1}{dt} \quad (9.12)$$

No sistema internacional, a unidade da indutância (volt vezes segundo, sobre ampere) é o **henry**, representada pela letra H.

## 9.6. Autoindução

A corrente num circuito produz um campo magnético com linhas de campo que produzem fluxos de sentido contrário na área delimitada pelo circuito e no exterior do circuito (figura 9.7).



**Figura 9.7.:** Linhas do campo magnético produzido pela corrente num circuito.

De acordo com a lei de Biot-Savart, o campo magnético produzido pelo circuito é diretamente proporcional à corrente. Portanto, o fluxo magnético produzido por um circuito sobre si próprio, e proporcional à corrente:

$$\Phi = LI \quad (9.13)$$

a constante  $L$  é a autoindutância do circuito. A fem autoinduzida no próprio circuito é:

$$\varepsilon_i = -L \frac{dI}{dt} \quad (9.14)$$

Quanto maior for a área do circuito, maior será a sua autoindutância. Para evitar uma autoindutância elevada, que pode ser indesejada no caso de correntes variáveis, a fonte num circuito não se liga como na figura acima, mas com dois fios colados uma ao lado do outro que ligam o dispositivo à fonte. Assim, reduz-se a área interna do circuito.

Nas partes do circuito onde se deseja que a indutância seja elevada, ligam-se bobinas com várias voltas e, portanto, com área interna elevada. Esses indutores representam-se nos diagramas de circuito com o símbolo da figura 9.8.



**Figura 9.8.:** Símbolo usado nos diagramas de circuito para representar a auto-indução.

$L$  representa o valor da indutância, medida em henrys no sistema internacional. O símbolo da auto-indução total do circuito coloca-se em alguma parte do circuito. Na análise do circuito, esse dispositivo é designado de **indutor** e representa um elemento passivo em que a diferença de potencial é diretamente proporcional à corrente:  $LdI/dt$ .

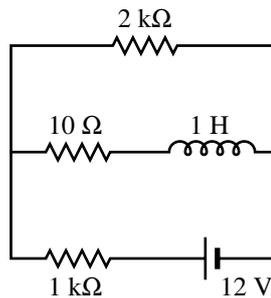
## 9.7. Circuitos de corrente contínua com indutores

Num circuito de corrente contínua com indutores, admitamos que as fontes foram ligadas no instante inicial  $t = 0$ . No preciso instante em que acabaram de ser ligadas as fontes, a corrente nos indutores deverá ser nula, porque antes de  $t = 0$  a corrente era nula e um aumento de 0 para um valor maior no instante  $t = 0$  implicaria uma derivada  $dI/dt$  infinita e tensão infinita no indutor. Portanto, no instante inicial os indutores podem ser considerados interruptores abertos que não permitem a passagem da corrente. Nos instantes seguintes a corrente pode aumentar gradualmente (resposta transitória).

A corrente não pode aumentar indefinidamente, assim que as correntes nos indutores atingirão valores finais constantes. Uma corrente final constante implica  $dI/dt = 0$  e tensão nula nos indutores; assim, para calcular as correntes finais podemos substituir os indutores por fios com resistência nula.

### Exemplo 9.3

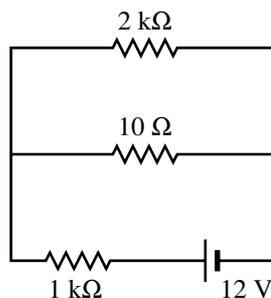
Uma bobina com resistência de  $10\ \Omega$  e indutância de  $1\ \text{H}$  liga-se a duas resistências e a uma fonte de  $12\ \text{V}$ , como se mostra no diagrama. Calcule as correntes inicial e final na resistência de  $2\ \text{k}\Omega$  e a relação entre elas.



**Resolução.** No instante inicial, é como se o indutor e a resistência de  $10\ \Omega$  não existissem, e o circuito tem uma única malha com a fonte e as duas resistências de  $1\ \text{k}\Omega$  e  $2\ \text{k}\Omega$  em série. Portanto, a corrente inicial nas duas resistências é:

$$I_0 = \frac{12}{3000} = 4\ \text{mA}$$

Para calcular as correntes finais, substituímos o indutor por um fio com resistência nula:



$2000 \parallel 10 = 2/201 \text{ k}\Omega$  e a resistência equivalente entre os elétrodos da fonte é:

$$R = 1 + \frac{2}{201} = \frac{203}{201} \text{ k}\Omega$$

a corrente é  $12/R = 2412/203 \text{ mA}$  e a diferença de potencial na resistência de  $2 \text{ k}\Omega$  é:

$$\Delta V = \left( \frac{2}{201} \right) \left( \frac{2412}{203} \right) = \frac{24}{203} \text{ V}$$

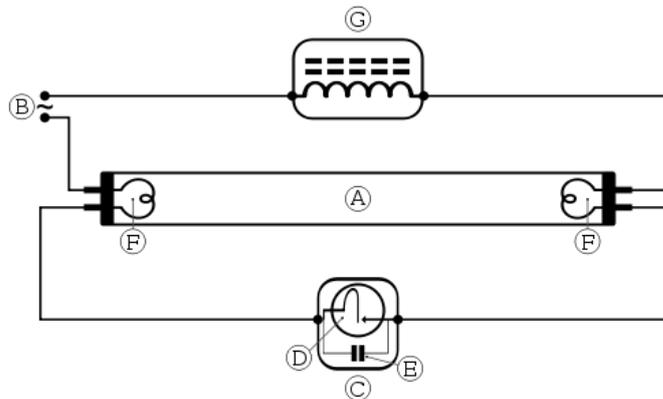
a corrente final na resistência de  $2 \text{ k}\Omega$  é:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{14}{203} \text{ mA} = 0.0591 \text{ mA}$$

A relação entre as correntes é:

$$\frac{I_0}{I} = \frac{203}{3} = 67.67$$

O exemplo anterior mostra uma das propriedades importantes dos indutores que os torna muito úteis como **balastros**, nomeadamente, um dispositivo que proporcionam corrente inicial elevada e uma corrente final muito menor. Os balastros são usados nas lâmpadas fluorescentes em que é necessária uma corrente elevada quando a lâmpada é ligada, para garantir que o gás dentro do tubo seja ionizado tornando-se bom condutor; após a ionização do gás, se a corrente mantivesse o valor inicial elevado, a lâmpada queimava-se.



**Figura 9.9.:** Diagrama de circuito de uma lâmpada fluorescente.

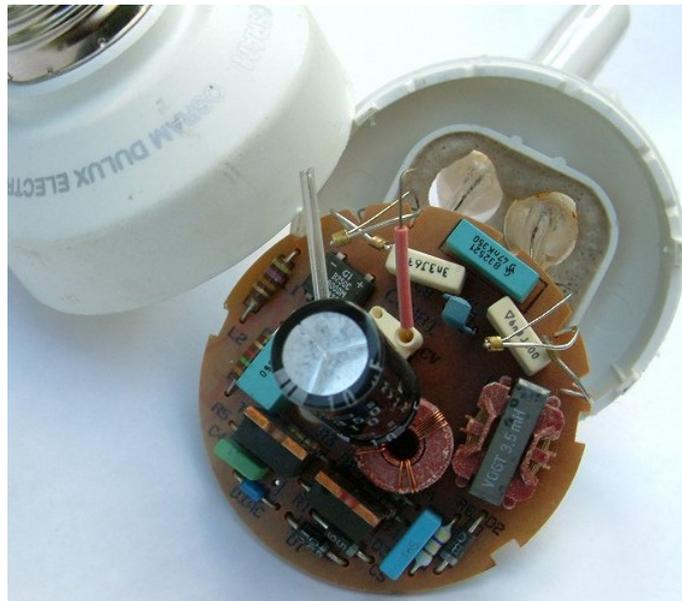
A figura 9.9 mostra o circuito usado numa lâmpada fluorescente, inventada por Nicola Tesla. Neste caso a fonte de alimentação é de tensão alternada. O balastro é a bobina G; como a sua resistência interna costuma ser baixa, foi ignorada no diagrama e as barras paralelas a tracejado representam um núcleo de material ferromagnético colocado dentro da bobina para aumentar a sua indutância. Inicialmente, o gás dentro do tubo A é isolador,

porque não está ionizado; a corrente passa pelos dois filamentos F, que aquecem o gás, facilitando a produção de íons.

Dentro do arrancador C, há uma lâmina metálica curva, que com a passagem da corrente é aquecida e dilatada, mudando a sua curvatura. Isso faz com que o interruptor em D seja aberto, deixando de passar corrente pelos filamentos e arrancador, mas passando através do tubo A, onde o gás já foi ionizado.

Um outro efeito da bobina G é que no instante em que o interruptor D for aberto, a corrente não diminuirá imediatamente para zero; continuarão a acumular-se cargas nos dois terminais do interruptor aberto, criando um campo elevado que pode produzir faíscas. Para evitar essas faíscas, que podem queimar o metal, liga-se um condensador E, em paralelo, que acumulará essas cargas em forma segura.

As atuais lâmpadas economizadoras de energia são também lâmpadas fluorescentes, em versão reduzida. As funções do balastro e o arrancador são garantidas por um pequeno circuito dentro da lâmpada, como pode ser visto na figura 9.10.



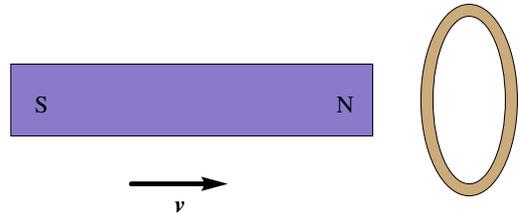
**Figura 9.10.:** Circuito no interior de uma lâmpada economizadora de energia.

## Perguntas

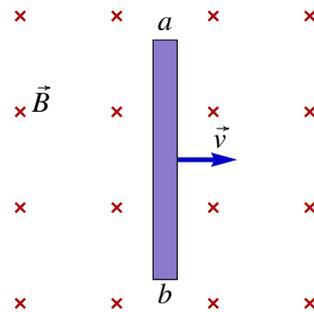
- Quando um comboio com motor elétrico está a subir um declive, está a consumir potência elétrica proveniente de uma central elétrica. No seu modo mais eficiente de operação, quando o comboio estiver a descer:
  - Deverá consumir ainda maior potência.
  - Poderá gerar potência elétrica que pode ser alimentada de volta para a central.
  - Não vai nem consumir nem gerar potência elétrica.
  - Consome a mesma quantidade de potência.
  - Nenhuma das anteriores.
- Uma barra condutora, com 25 cm de comprimento, desloca-se com velocidade uniforme de 12 m/s, num plano perpendicular a um campo magnético uniforme de 80 G. Calcule a diferença de potencial induzida entre os extremos da barra.
  - 240 V
  - 0.24 V
  - 0.024 V
  - 0.384 V
  - 3.84 kV
- Uma espira de fio condutor desloca-se, com velocidade constante, dentro de uma região onde existe um campo magnético uniforme e constante, perpendicular ao plano da espira. A fem induzida nos terminais da espira será:
  - Variável com o tempo.
  - Constante.
  - Negativa.
  - Positiva.
  - Nula.
- Se o número de espiras numa bobina for reduzido para metade, e a corrente através da bobina triplicada, mantendo outras propriedades constantes (área das espiras, forma, etc.), a sua auto-indutância:
  - Aumenta num fator de 4.
  - Aumenta num fator de 6.
  - Aumenta num fator de 9.
  - Diminui num fator de 6.
  - Diminui num fator de 4.
- Uma bobina retangular de 3 cm por 5 cm tem 100 espiras e o seu versor perpendicular faz um ângulo de  $55^\circ$  com um campo magnético uniforme de 0.35 T. A bobina roda, durante 0.33 s, até o ângulo entre o campo e o versor perpendicular aumentar para  $90^\circ$ . Calcule a força eletromotriz induzida média.
  - 160 mV
  - 130 mV
  - 91 mV
  - 68 mV
  - 29 mV

## Problemas

1. Um ímã desloca-se a velocidade constante sobre o eixo de uma espira, como mostra a figura. (a) Faça um esquema qualitativo do fluxo magnético  $\Phi$  através da espira em função do tempo  $t$ . Indique o instante  $t_1$  em que o ímã está a meio da travessia da espira. (b) Desenhe o gráfico da corrente  $I$  na espira em função do tempo.

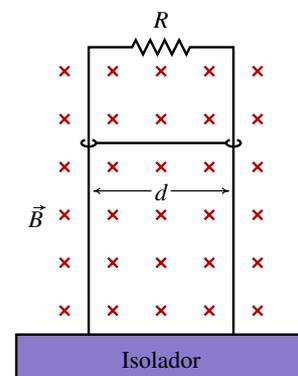


2. Uma barra metálica de comprimento  $l = 9$  cm desloca-se com velocidade constante  $v = 18$  cm/s, dentro de um campo magnético uniforme  $B = 3.5$  G, perpendicular à barra (ver figura). Calcule a diferença de potencial  $V_a - V_b$ .

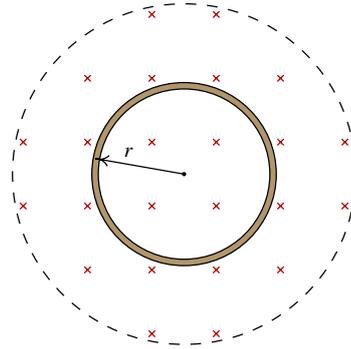


3. Um avião Boeing 747 tem um comprimento total de 60 m entre as pontas das asas. O avião voa a 800 km/h e a uma altitude constante, em direção sul-norte, numa região onde o campo magnético da Terra é 0.5 G, formando um ângulo de  $60^\circ$  com a vertical. Calcule a diferença de potencial induzida entre as pontas das asas.
4. Uma espira quadrada de cobre, com 4 cm de lado, encontra-se sobre a superfície horizontal de uma mesa. Um eletro-ímã está colocado em cima da mesa, com o seu pólo norte um pouco acima e à esquerda da espira, de maneira que o campo magnético é aproximadamente uniforme e aponta para baixo através da espira, formando um ângulo de  $30^\circ$  com a vertical. Calcule a fem média induzida na espira enquanto o campo magnético varia desde zero até ao seu valor final de 0.5 T, num intervalo de tempo igual a 200 ms. Em que sentido será a corrente induzida?

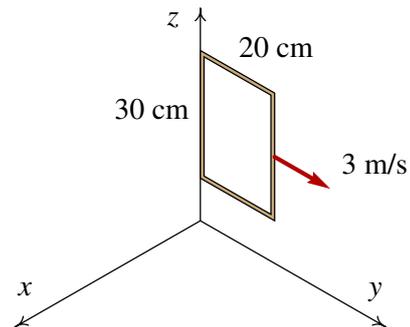
5. Na figura, uma barra condutora de comprimento  $d$  e massa  $m$ , desliza sobre dois trilhos metálicos verticais, dentro de um campo magnético  $\vec{B}$ , uniforme. A resistência dos trilhos e da barra são desprezáveis em relação a  $R$ . A barra mantém sempre o contato com os trilhos mas o atrito com eles, assim como o atrito com o ar, são também desprezáveis. Quando a barra começa a cair livremente, o seu movimento é inicialmente acelerado, mas atinge logo uma velocidade constante  $v$ . Calcule a velocidade limite  $v$ .



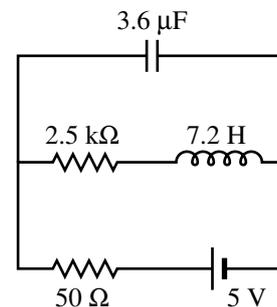
6. No interior do círculo a tracejado na figura, existe um campo magnético que aponta para dentro do papel e com módulo igual a  $0.6e^{-t/15}$  (unidades SI,  $t =$  tempo). Calcule o módulo, direção e sentido do campo elétrico induzido dentro do anel condutor de raio  $r = 9$  cm.



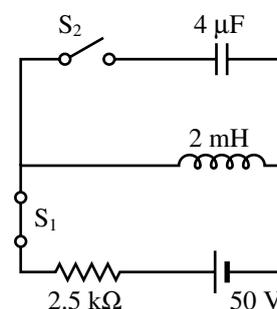
7. Uma espira condutora retangular, paralela ao plano  $yz$ , desloca-se com velocidade constante  $\vec{v} = 3\vec{e}_y$  (m/s) dentro de uma região onde existe um campo magnético com componentes:  $B_x = (6 - y)$  (SI) e  $B_y = B_z = 0$ . Calcule a *fem* induzida na espira, em função do tempo  $t$ , a partir do instante  $t = 0$  em que a espira se encontra na posição da figura.



8. No circuito da figura, calcule as correntes iniciais no indutor e no condensador, a corrente final no indutor e a carga final no condensador.



9. (a) No circuito da figura, o interruptor  $S_1$  tem estado fechado durante muito tempo e o interruptor  $S_2$  aberto; calcule a corrente no indutor. (b) A seguir, no mesmo instante abre-se o interruptor  $S_1$  e fecha-se o interruptor  $S_2$ ; nesse preciso instante, a corrente no indutor deverá manter o valor calculado na alínea anterior. Explique qualitativamente o que acontecerá com a corrente no indutor, e a carga no condensador, nos instantes seguintes.



## 10. Processamento de sinais



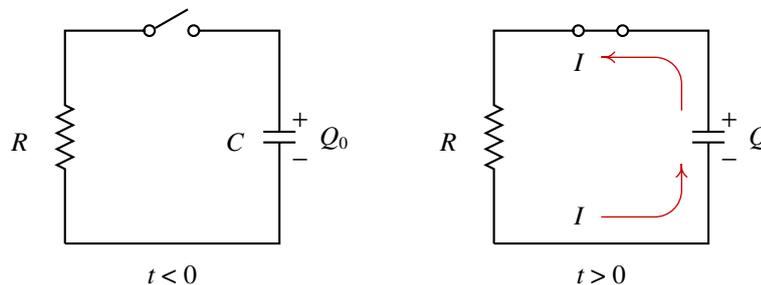
Um sintetizador é um instrumento musical baseado no processamento de sinais eléctricos. É produzida uma tensão eléctrica oscilatória que é logo processada passando por vários filtros que alteram a forma da função que representa a tensão em função do tempo. O sinal de saída é alimentado num altifalante produzindo o som desejado. A fotografia mostra um sintetizador Moog, modelo Minimoog, de 1970.

Uma aplicação importante dos circuitos elétricos é no processamento de sinais. Os sinais a serem processados são tensões elétricas variáveis em função do tempo. Essas tensões podem ser produzidas, por exemplo, num microfone ou em diversos tipos de transdutores que são usados para medir pressões, temperaturas e outras propriedades físicas. O sinal elétrico produzido pelo transdutor constitui uma fonte de tensão ou corrente variável no circuito elétrico usado para o seu processamento.

Neste capítulo designaremos por **sinal** qualquer grandeza que varie em função do tempo em alguma parte de um circuito. Por exemplo, uma tensão  $V(t)$ , uma corrente  $I(t)$  ou a carga  $Q(t)$  num condensador. Usaremos um til para designar as respectivas transformadas de Laplace, nomeadamente,  $\tilde{V}(s)$ ,  $\tilde{I}(s)$  e  $\tilde{Q}(s)$ . Quando for claro que estamos a referir-nos a um sinal, por vezes escreveremos apenas  $V$  ou  $\tilde{V}$ , ficando implícito que são funções que dependem do tempo  $t$  e da frequência  $s$  (o apêndice A apresenta um sumário sobre a transformada de Laplace).

## 10.1. Circuito RC

A figura 10.1 mostra o diagrama de circuito para um condensador, com carga inicial  $Q_0$ , que é descarregado ligando-o a uma resistência  $R$ . Esse circuito é designado de circuito RC.



**Figura 10.1.:** Descarga de um condensador.

O instante  $t = 0$  em que o condensador é ligado à resistência corresponde ao instante em que é fechado o interruptor no diagrama de circuito da figura 10.1. Quando o condensador começa a descarregar, a corrente nele será igual à taxa de diminuição da sua carga,  $-dQ/dt$ .

Em qualquer instante  $t \geq 0$ , a corrente e a diferença de potencial no condensador serão iguais à corrente  $I$  e a diferença de potencial  $IR$  na resistência:

$$-\frac{dQ}{dt} = I \qquad \frac{Q}{C} = IR \qquad (10.1)$$

Combinando as duas equações anteriores obtemos uma equação diferencial para a carga em função do tempo:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \qquad (t \geq 0) \qquad (10.2)$$

Calculando a transformada de Laplace (apêndice A) nos dois lados da equação obtemos:

$$s\tilde{Q} - Q_0 = -\frac{\tilde{Q}}{RC} \quad (10.3)$$

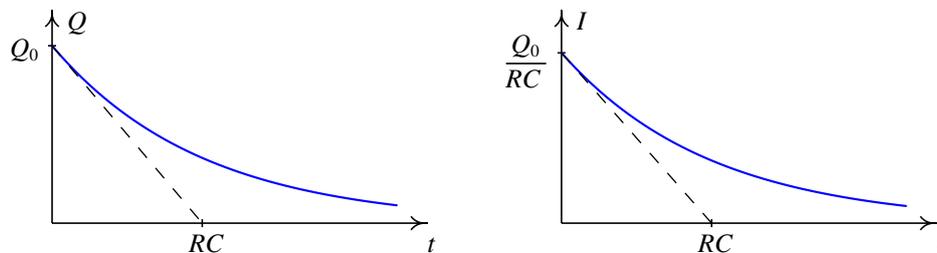
e, portanto,

$$\tilde{Q} = \frac{Q_0}{s + 1/(RC)} \quad (10.4)$$

A transformada inversa dessa expressão dá a carga em função do tempo:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/(RC)} \quad (10.5)$$

Assim, a carga no condensador decresce de forma exponencial. A corrente obtém-se dividindo a carga por  $RC$  e, portanto, também decresce de forma exponencial. Os gráficos da carga e da corrente, em função do tempo, são apresentados na figura 10.2.



**Figura 10.2.:** Carga e corrente num condensador a descarregar.

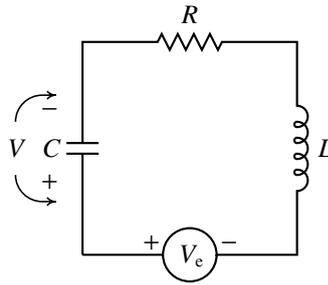
A constante  $t_C = RC$ , com unidades de tempo, designa-se de **constante de tempo**. É o tempo que demoraria a descarregar o condensador se a corrente mantivesse o seu valor inicial  $Q_0/t_C$ . A constante de tempo  $t_C$  é também igual ao intervalo de tempo em que a carga, e a corrente, diminuem até  $1/e$  vezes os seus valores iniciais; nomeadamente, o tempo que demoram em diminuir até 37% dos valores iniciais. Quanto maior for a constante de tempo, mais lentamente decrescerão a carga e a corrente no condensador.

## 10.2. Equações diferenciais dos circuitos

Vamos considerar circuitos onde existe uma fonte com tensão variável  $V_e(t)$ , que constitui o **signal de entrada**. O nosso interesse será calcular a tensão  $V(t)$  produzida em algum elemento do circuito; essa tensão  $V(t)$  constitui o **signal de saída** do circuito.

Para facilitar a nossa análise, vamos admitir que o sinal de entrada  $V_e(t)$  só aparece a partir de um instante que arbitramos  $t = 0$  e que em  $t < 0$  o sistema encontra-se em equilíbrio estável. Já explicaremos no fim desta seção o que isso quer dizer.

O primeiro exemplo que estudaremos é o **circuito RLC** da figura 10.3, onde o sinal de saída é a tensão no condensador. Os símbolos  $+$  e  $-$  não implicam tensões positivas ou negativas, mas indicam apenas que  $V_e(t)$ , ou  $V(t)$ , é o potencial no ponto designado  $+$ , menos o potencial no ponto designado  $-$ .



**Figura 10.3.:** Circuito  $RLC$  com saída no condensador.

Se  $I(t)$  for a corrente no circuito, as diferenças de potencial na resistência e no indutor serão:

$$RI(t) \quad LI'(t) \quad (10.6)$$

onde  $I'(t)$  é a derivada de  $I(t)$  em ordem a  $t$ .

No condensador, a diferença de potencial é o sinal de saída  $V(t)$ , que é diretamente proporcional à carga no condensador:

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (10.7)$$

A regra da malha aplicada ao circuito da figura 10.3 é:

$$LI' + RI + V = V_e \quad (10.8)$$

Como a corrente  $I$  é igual à derivada da carga  $Q$  no condensador, derivando a equação 10.7 obtemos:

$$I = CV' \quad (10.9)$$

onde  $V'$  é a derivada de  $V(t)$ . Derivando novamente obtemos:

$$I' = CV'' \quad (10.10)$$

Finalmente, substituindo 10.9 e 10.10 na equação 10.8 obtemos a equação que permite calcular o sinal de saída  $V$  a partir do sinal de entrada  $V_e$ :

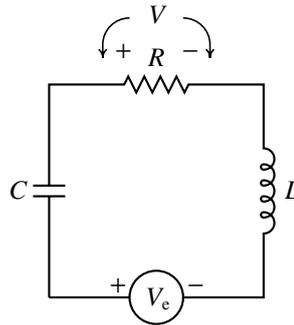
$$LCV'' + RCV' + V = V_e \quad (10.11)$$

Para um sinal de entrada conhecido,  $V_e(t)$ , e valores de  $R$ ,  $C$  e  $L$ , a equação diferencial 10.11 pode ser resolvida para encontrar o sinal de saída  $V(t)$ .

O nosso segundo exemplo é o mesmo circuito  $RLC$  da figura 10.3 mas com tensão de saída na resistência (figura 10.4).

Assim, a tensão de saída verifica a lei de Ohm:

$$V = RI \quad (10.12)$$



**Figura 10.4.:** Circuito  $RLC$  com saída na resistência.

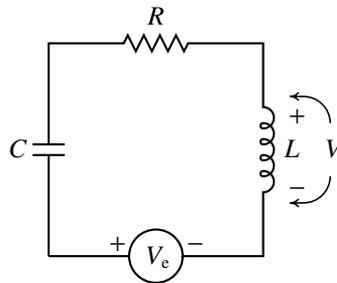
e aplicando a regra das malhas obtemos:

$$LI' + V + \frac{Q}{C} = V_e \quad (10.13)$$

Derivando os dois lados da equação anterior, substituindo  $i$  com a equação 10.12 e lembrando que a derivada da carga no condensador é igual à corrente  $i$ , obtemos a equação deste circuito:

$$\frac{L}{R} V'' + V' + \frac{1}{RC} V = V_e' \quad (10.14)$$

Finalmente, consideremos o caso em que o sinal de saída é a diferença de potencial no indutor (figura 10.5).



**Figura 10.5.:** Circuito  $RLC$  com saída no indutor.

Neste caso a tensão de saída verifica a equação:

$$V = LI' \quad (10.15)$$

Derivando a equação da malha duas vezes e substituindo  $I'$  com a equação 10.15 obtemos a equação do circuito na figura 10.5:

$$V'' + \frac{R}{L} V' + \frac{1}{LC} V = V_e'' \quad (10.16)$$

Para cada possível sinal de entrada,  $V_e(t)$ , as equações diferenciais dos 3 exemplos considerados (equações 10.11, 10.14 e 10.16) são equações diferenciais lineares, não homogêneas, com coeficientes constantes. Qualquer outro circuito mais complicado, formado por fontes, resistências, condensadores e indutores, conduzirá ao mesmo tipo de equações diferenciais.

Todas as equações diferenciais lineares não homogêneas com coeficientes constantes podem ser escritas na forma de um sistema dinâmico não autônomo. Em  $t < 0$ , como o sinal de entrada é nulo, o circuito é descrito por um sistema dinâmico autônomo e linear. Consequentemente, terá um único ponto de equilíbrio  $V = V' = 0$  (se a equação for de segunda ordem,  $V = V' = V'' = 0$  se for de terceira ordem, etc).

Nos casos reais, a resistência  $R$  nunca é totalmente nula, o que faz com que o sistema dinâmico autônomo seja dissipativo e o ponto de equilíbrio seja estável (atrativo). Assim, podemos admitir que em  $t < 0$  o sistema evolui para o estado de equilíbrio e quando  $t \rightarrow 0^-$  o sinal de saída e a sua derivada serão nulos  $V = V' = 0$ . Isso implica que as cargas e correntes no circuito também serão nulas no limite  $t \rightarrow 0^-$ .

### 10.3. Unidades de tempo e frequência

Vimos na seção 10.1 que o comportamento de um circuito  $RC$  depende de uma única constante própria do sistema, com unidades de tempo:

$$t_C = RC \quad (10.17)$$

Como o produto entre uma resistência  $R$  e uma capacidade  $C$  tem unidades de tempo, podemos concluir que o termo  $RCV'$  na equação 10.11 tem unidades de voltagem, já que  $V'$  tem unidades de voltagem sobre tempo.

A equação 10.14 permite-nos concluir também que  $L/R$  deverá ter unidades de tempo, já que o termo  $(L/R)V''$  nessa equação deverá ter unidades de voltagem sobre tempo. Assim, definiremos uma segunda constante de tempo:

$$t_L = \frac{L}{R} \quad (10.18)$$

O produto das duas constantes de tempo,  $t_C t_L = LC$  tem unidades de tempo ao quadrado e podemos conferir que todos os termos em cada uma das equações 10.11, 10.14 e 10.16 têm as mesmas unidades, como devia ser.

As equações 10.17 e 10.18 permitem-nos definir o sistema de unidades mais conveniente num circuito determinado. Por exemplo, se as resistências no circuito fossem da ordem dos  $k\Omega$  e as capacidades da ordem dos  $nF$ , a unidade de tempo mais conveniente seria o  $\mu s$  (produto entre  $k\Omega$  e  $nF$ ), e, portanto, a unidade de indutância mais conveniente seria o  $mH$  (produto entre  $\mu s$  e  $k\Omega$ ) e a unidade de frequência mais conveniente seria  $MHz$  (inverso de  $\mu s$ ). Se usarmos os valores das resistências em  $k\Omega$ , capacidades em  $nF$ , indutâncias em  $mH$ , tempos em  $\mu s$  e frequências em  $MHz$ , poderemos ignorar completamente as unidades e trabalhar com números de ordens de grandeza semelhantes.

## 10.4. Impedância

As equações dos circuitos com condensadores e indutores são sempre equações diferenciais, como vimos nos exemplos da seção 10.2. No entanto, como essas equações são lineares, as suas transformadas de Laplace serão sempre equações algébricas em função de um parâmetro  $s$  com unidades de frequência (se não estiver familiarizado com as transformadas de Laplace, consulte o apêndice A).

Será muito mais fácil encontrar a equação do circuito em função do parâmetro  $s$  e a seguir podemos calcular a transformada de Laplace inversa se quisermos saber como é a equação diferencial em função do tempo  $t$ . A equação do circuito, no domínio da frequência  $s$ , é obtida calculando as transformadas de Laplace da tensão em cada um dos elementos do circuito.

Se admitirmos que o circuito encontra-se inicialmente num estado de equilíbrio estável e que o sinal de entrada só aparece em  $t = 0$ , temos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} V(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} V_e(t) = 0 \quad (10.19)$$

Assim, as transformadas de Laplace de  $V_e'$  e  $V'$  são  $s\tilde{V}_e(s)$  e  $s\tilde{V}(s)$ , onde  $\tilde{V}_e$  e  $\tilde{V}$  são as transformadas dos sinais de entrada e saída. Como as derivadas dos sinais também são inicialmente nulas, as transformadas de  $V_e''$  e  $V''$  são  $s^2\tilde{V}_e(s)$  e  $s^2\tilde{V}(s)$ .

Numa resistência a lei de Ohm define a relação entre os sinais da tensão e da corrente:

$$V(t) = RI(t) \quad (10.20)$$

aplicando a transformada de Laplace nos dois lados da equação obtemos:

$$\tilde{V} = R\tilde{I} \quad (10.21)$$

Num indutor, a relação entre a tensão e a corrente é:

$$V(t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad (10.22)$$

Como estamos a admitir que em  $t < 0$  a tensão e a corrente são nulas, usando a propriedade da transformada de Laplace da derivada obtemos a equação:

$$\tilde{V} = Ls\tilde{I} \quad (10.23)$$

que é semelhante à lei de Ohm 10.21 para as resistências, excepto que em vez de  $R$  temos uma função  $Z(s)$  que depende da frequência:

$$Z(s) = Ls \quad (10.24)$$

Num condensador, a diferença de potencial é diretamente proporcional à carga acumulada:

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (10.25)$$

Como estamos a admitir que em  $t < 0$  não existem cargas nem correntes, então a carga acumulada no instante  $t$  será igual ao integral da corrente, desde  $t = 0$  até o instante  $t$ :

$$V(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(u) \, du \quad (10.26)$$

e usando a propriedade da transformada de Laplace do integral, obtemos:

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{sC} \quad (10.27)$$

Mais uma vez, obtivemos uma relação semelhante à lei de Ohm, mas em vez do valor da resistência  $R$  temos uma função que depende da frequência:

$$Z(s) = \frac{1}{sC} \quad (10.28)$$

Resumindo, no domínio da frequência, as resistências, indutores e condensadores verificam todos uma **lei de Ohm generalizada**:

$$\boxed{\tilde{V}(s) = Z(s)\tilde{I}(s)} \quad (10.29)$$

Onde a função  $Z(s)$  denomina-se **impedância generalizada** e é dada pela seguinte expressão:

$$Z = \begin{cases} R & , \text{ nas resistências} \\ Ls & , \text{ nos indutores} \\ \frac{1}{Cs} & , \text{ nos condensadores} \end{cases} \quad (10.30)$$

É de salientar que os indutores produzem uma maior impedância para sinais com frequências  $s$  maiores, os condensadores apresentam maior impedância quando o sinal tiver menor frequência e nas resistências a impedância é constante, independentemente da frequência.

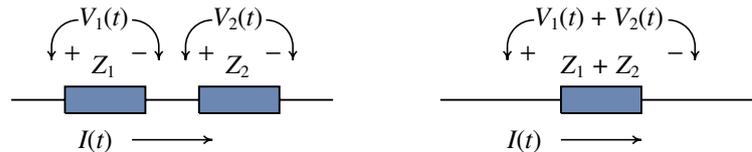
## 10.5. Associações de impedâncias

Na seção 3.7 demonstramos que duas resistências em série são equivalentes a uma única resistência com valor igual à soma das resistências. No processo da demonstração foram usados os factos de que a corrente nas duas resistências em série deve ser igual, a diferença de potencial total é igual à soma das diferenças de potencial em cada resistência e em cada resistência verifica-se a lei de Ohm.

Os mesmos 3 factos são válidos no caso de dois dispositivos em série (resistências, indutores ou condensadores) onde se verifique a lei de Ohm generalizada (equação 10.29). Assim, podemos generalizar as mesmas regras de combinação de resistências em série, ao

caso de condensadores e indutores, como ilustra a figura 10.6. Nomeadamente, quando dois dispositivos são ligados em série, o sistema pode ser substituído por um único dispositivo com impedância igual à soma das impedâncias dos dois dispositivos:

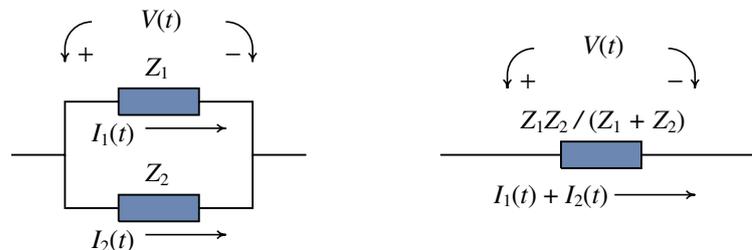
$$Z_{\text{série}} = Z_1 + Z_2 \quad (10.31)$$



**Figura 10.6.:** Associação de impedâncias em série e sistema equivalente.

Se os dois dispositivos estiverem ligados em paralelo, como no caso da figura 10.7, em qualquer instante a diferença de potencial será a mesma nos dois dispositivos e a corrente total no sistema será a soma das correntes nos dois dispositivos. Isso, junto com a lei de Ohm generalizada, permite-nos concluir que o sistema pode ser substituído por um único dispositivo com impedância:

$$Z_{\text{paralelo}} = Z_1 \parallel Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (10.32)$$

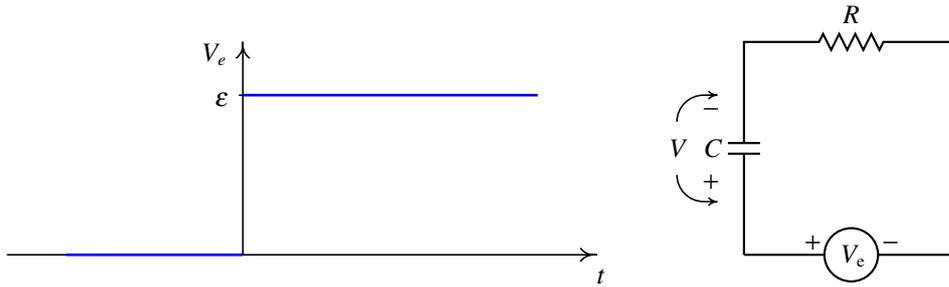


**Figura 10.7.:** Associação de impedâncias em paralelo e sistema equivalente.

### Exemplo 10.1

Um condensador é ligado a uma fonte de tensão contínua para o carregar. Descreva a variação da carga e da corrente no condensador, em função do tempo (resposta transitória).

**Resolução.** A fonte de tensão contínua, com fem  $\varepsilon$ , ligada num instante que arbitramos  $t = 0$ , pode ser considerada como um sinal de entrada  $V_e = \varepsilon u(t)$ , onde  $u(t)$  é a função **escalão unitário** (ver apêndice A). O gráfico de  $V_e = \varepsilon u(t)$  é representado no lado esquerdo da figura seguinte:



O lado direito da figura mostra o diagrama do circuito, em que  $R$  representa a soma da resistência interna da fonte, mais a resistência dos fios usados para ligar a fonte ao condensador.

A impedância total do circuito é a soma das impedâncias da resistência e do condensador, já que estão em série:

$$Z_t = R + \frac{1}{Cs}$$

e, portanto, a transformada da corrente no circuito será:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{R + 1/(Cs)} = \frac{\epsilon}{Rs + 1/C}$$

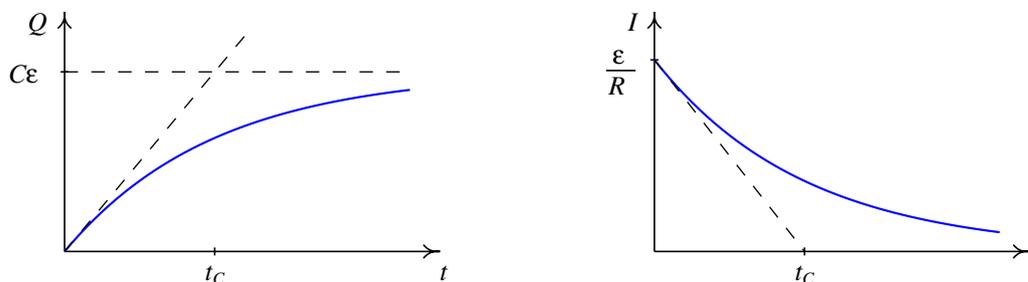
A transformada da tensão no condensador é igual ao produto da impedância do condensador vezes  $\tilde{I}$ :

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{Cs} = \frac{\epsilon}{s(tc s + 1)} = \epsilon \left( \frac{1}{s} - \frac{tc}{tc s + 1} \right)$$

onde,  $t_c = RC$  é a constante de tempo do circuito. Calculando a transformada de Laplace inversa obtemos a tensão no condensador, em função do tempo:

$$V(t) = \epsilon \left( 1 - e^{-t/t_c} \right) \quad (10.33)$$

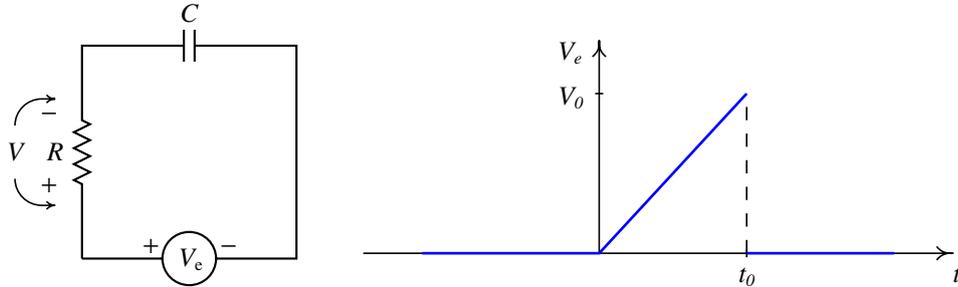
A carga em função do tempo  $Q(t)$  obtém-se multiplicando a expressão anterior por  $C$ . A figura 10.8 mostra os gráficos da carga e da corrente ( $dQ/dt$ ) em função do tempo. A carga aumenta em forma exponencial, desde zero até o valor máximo  $C\epsilon$ . O valor final da carga (quando  $t$  for muito muito maior que  $t_c$ ), será  $C\epsilon$ .



**Figura 10.8.:** Gráficos do estado transitório da carga e a corrente num condensador a ser carregado com uma fonte de tensão contínua.

**Exemplo 10.2**

No circuito da figura, encontre o sinal de saída  $V(t)$ , quando o sinal de entrada  $V_e(t)$  for o sinal triangular representado no gráfico.



**Resolução.** A impedância equivalente e a transformada da corrente são iguais que no exemplo anterior:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{R + 1/(Cs)}$$

Mas como a tensão de saída é agora medida na resistência, temos:

$$\tilde{V} = R\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{1 + 1/(tCs)} \quad (10.34)$$

onde  $t_C = RC$  é a constante de tempo.

Usando a função escalão unitário, a expressão para o sinal de entrada é:

$$V_e = \frac{V_0 t}{t_0} (u(t) - u(t - t_0))$$

Para calcular a transformada de Laplace, convém escrevê-la numa outra forma equivalente:

$$V_e = \frac{V_0}{t_0} (t u(t) - t_0 u(t - t_0) - (t - t_0) u(t - t_0))$$

e, usando a propriedade de deslocamento no tempo, a sua transformada de Laplace é:

$$\tilde{V}_e = \frac{V_0}{t_0} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{t_0 e^{-t_0 s}}{s} - \frac{e^{-t_0 s}}{s^2} \right)$$

Substituindo  $\tilde{V}_e$  na equação 10.34 obtemos:

$$\tilde{V} = \frac{V_0}{t_0} \left( \frac{1}{s(s + 1/t_C)} - \frac{t_0 e^{-t_0 s}}{s + 1/t_C} - \frac{e^{-t_0 s}}{s(s + 1/t_C)} \right)$$

Para calcular a transformada inversa, primeiro ignoramos os fatores exponenciais; assim temos que calcular as transformadas inversas das duas seguintes expressões:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1/t_C} \right\} = e^{-t/t_C}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + 1/t_C)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{t_C}{s} - \frac{t_C}{s + 1/t_C} \right\} = t_C \left( 1 - e^{-t/t_C} \right)$$

em que foi usada uma expansão em frações parciais para a segunda expressão. Usando esses dois resultados, podemos escrever a transformada inversa de  $\tilde{V}$ :

$$V(t) = \frac{V_0 t_C}{t_0} \left( 1 - e^{-t/t_C} \right) - V_0 u(t - t_0) e^{-(t-t_0)/t_C} - \frac{V_0 t_C}{t_0} u(t - t_0) \left( 1 - e^{-(t-t_0)/t_C} \right) \quad (10.35)$$

Vamos mostrar agora como podíamos obter o sinal  $V(t)$  usando o programa *Maxima*. Começamos por definir o sinal de entrada (para maior clareza usaremos maiúsculas para as funções do tempo,  $V_e$ ,  $V$  e  $I$ , e minúsculas para as suas transformadas de Laplace,  $v_e$ ,  $v$  e  $i$ )

```
(%i1) Ve: V0*t*(1 - unit_step(t - t0)) / t0$
```

Para calcular a transformada de Laplace usa-se a função `laplace`, que precisa de 3 argumentos: a função, a variável usada para o tempo e a variável usada para a frequência.

```
(%i2) ve: laplace(Ve, t, s);
```

```
(%o2) - 
$$\frac{e^{-s t_0} V_0}{s^2 t_0} - \frac{e^{-s t_0} V_0}{s} + \frac{V_0}{s^2 t_0}$$

```

A impedância total e a transformada da corrente no circuito são:

```
(%i3) Zt: R + 1/(C*s)$
```

```
(%i4) i: ve/Zt$
```

A transformada do sinal de saída é a tensão na resistência, no domínio da frequência:

```
(%i5) v: expand(R*i);
```

```
(%o5) - 
$$\frac{R V_0}{s^2 t_0 e^{s t_0}} - \frac{R V_0}{s e^{s t_0} \left( R + \frac{e^{s t_0}}{C} \right)} + \frac{R V_0}{s^2 t_0 R + \frac{s t_0}{C}}$$

```

o comando `expand` foi usado para separar os 3 termos na expressão. Neste momento deveríamos simplesmente calcular a transformada inversa de  $v_e$ , usando a função `ilt` do Maxima, mas atualmente (versão 2.28 do Maxima) a função `ilt` não está completamente implementada e não consegue calcular transformadas inversas de funções com termos exponenciais. Para essas funções, podemos ignorar a função exponencial, calcular a transformada inversa e a seguir deslocá-la no tempo, usando a propriedade do deslocamento no tempo da transformada de Laplace (equação A.13 no apêndice A).

A separação dos 3 termos, eliminando as funções exponenciais nos dois primeiros termos, pode ser feita assim:

```
(%i6) v1: ratsimp (exp(s*t0)*part(v,1));
                                C R V0
(%o6)  -----
                2
                s  t0 C R + s t0
(%i7) v2: ratsimp (exp(s*t0)*part(v,2));
                                C R V0
(%o7)  -----
                s C R + 1
(%i8) v3: part(v,3);
                                R V0
(%o8)  -----
                2          s t0
                s  t0 R + ----
                            C
```

e podemos calcular as suas transformadas de Laplace inversas:

```
(%i9) V1: ilt (v1, s, t)$
(%i10) V2: ilt (v2, s, t)$
(%i11) V3: ilt (v3, s, t)$
```

Finalmente, com a propriedade do deslocamento no tempo (equação A.13) obtemos  $V(t)$

```
(%i12) V: ev(ratsimp(V1+V2), t=t-t0)*unit_step(t - t0) + V3;
(%o12)
                                t          t0          t
                                ---          ---          ---
                                C R          C R          C R
unit_step(t - t0) %e          ((C R - t0) %e          - C R %e          ) V0
-----
                                t0
                                t
                                ---
                                C R
                                C R %e          V0          C R V0
----- + -----
                                t0          t0
```

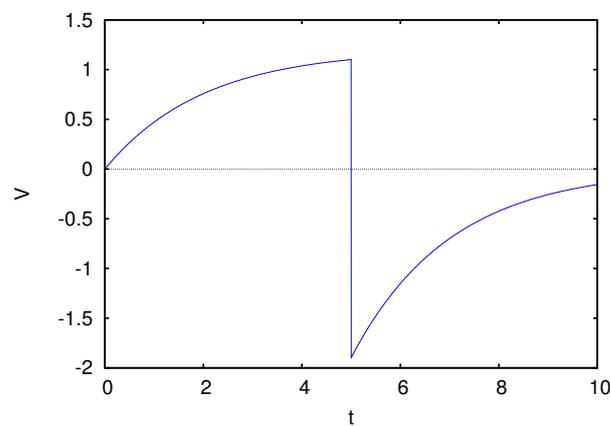
esta expressão é equivalente à que já tínhamos obtido na equação 10.35. A vantagem de termos usado o Maxima é que a seguir podemos fazer um gráfico do sinal de saída, dando valores numéricos aos parâmetros.

Por exemplo, com os parâmetros  $t_0 = 5$ ,  $R = 2$ ,  $C = 1$  e  $V_0 = 3$  o gráfico pode ser obtido com o comando:

```
(%i13) plot2d (ev(V,t0=5,R=2,C=1,V0=3), [t,0,10], [ylabel,"V"]);
```

e o resultado é apresentado na figura 10.9.

A descontinuidade do sinal em  $t = 5$  é devida a que entre  $t = 0$  e  $t = 5$  a fonte estava a alimentar tanto o condensador como a resistência, mas no instante em que a tensão da fonte desaparece, em  $t = 5$ , o condensador passa a ser um elemento ativo no circuito, alimentando a resistência. O sentido da corrente inverte-se em  $t = 5$  dando origem à mudança abrupta no sinal da tensão de saída.



**Figura 10.9.:** Sinal de saída no exemplo 10.2, com os valores  $t_0 = 5$ ,  $R = 2$ ,  $C = 1$  e  $V_0 = 3$ .

Outra função do Maxima que é bastante útil para calcular integrais e transformadas inversas é `partfrac`, para obter expansões em frações parciais. Essa função precisa de 2 argumentos: a expressão e a variável nessa expressão. Por exemplo, a expansão:

$$\frac{1}{s(s+1/tc)} = \frac{tc}{s} - \frac{tc}{s+1/tc}$$

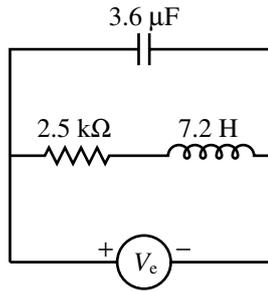
usada no exemplo anterior para obter o resultado 10.35, pode ser obtida com o comando:

```
(%i14) partfrac( 1/ (s*(s + 1/tc)), s);
```

```
(%o14)
      tc      tc
----- - ----
      s      s tc + 1
```

### Exemplo 10.3

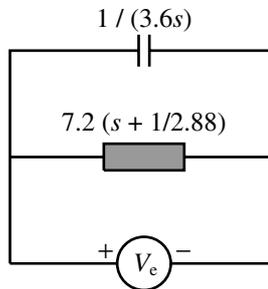
No circuito da figura, calcule as transformadas de Laplace das tensões e correntes em cada um dos 3 dispositivos, em função da transformada da tensão de entrada,  $\tilde{V}_e$ . Encontre as expressões para essas tensões e correntes, em função do tempo, no caso particular em que a entrada seja uma fonte ideal de tensão contínua com fem  $\varepsilon$ .



**Resolução.** O primeiro que convém fazer é escolher um sistema de unidades que facilite os cálculos numéricos. Para todas as impedâncias (resistências) usaremos  $\text{k}\Omega$  e para as capacidades  $\mu\text{F}$ ; isso implica que teremos que usar  $\text{ms}$  como unidade de tempo e  $\text{H}$  como unidade de indutância. Se usarmos  $\text{V}$  para as tensões, então as correntes estarão em  $\text{mA}$ . Com esse sistema de unidades, as impedâncias do condensador, da resistência e do indutor são:  $1/(3.6 \text{ s})$ ,  $2.5$  e  $7.2 \text{ s}$  onde  $s$  será medida em  $\text{kHz}$ . A resistência e o indutor estão em série, podendo ser combinados numa única impedância com valor:

$$7.2s + 2.5 = 7.2 \left( s + \frac{1}{2.88} \right)$$

Repare que a última simplificação é uma questão de gosto, para trabalharmos com constantes de tempo e neste caso  $2.88 = 7.2/2.5$  é a constante de tempo para esse segmento do circuito. Assim o circuito original é equivalente ao seguinte circuito com dois elementos em paralelo:



Nos dois elementos em paralelo a tensão é a mesma, igual à tensão  $V_e$ . Assim, a transformada da corrente que passa através do condensador é:

$$\tilde{I}_C = \frac{\tilde{V}_e}{Z_C} = 3.6s \tilde{V}_e$$

E a transformada da corrente através da resistência e do condensador é:

$$\tilde{I}_R = \tilde{I}_L = \frac{\tilde{V}_e}{Z_{RL}} = \frac{\tilde{V}_e}{7.2(s + 1/2.88)}$$

As transformadas das tensões na resistência e no indutor são:

$$\tilde{V}_R = R \tilde{I}_R = \frac{\tilde{V}_e}{2.88s + 1} \quad \tilde{V}_L = Z_L \tilde{I}_R = \frac{s \tilde{V}_e}{s + 1/2.88}$$

No caso em que a fonte é de tensão contínua,  $V_e = \varepsilon$ , e, portanto,

$$\tilde{V}_e = \varepsilon/s$$

No condensador, temos:

$$V_C = V_e = \varepsilon \quad \tilde{I}_C = 3.6\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad I_C = 3.6\varepsilon\delta(t)$$

onde  $\delta(t)$  é a função delta de Dirac (impulso unitário). Repare que a corrente é infinita em  $t = 0$  e nula em outros instantes, mas o integral da corrente é igual à carga armazenada no condensador,  $3.6\varepsilon$ . Esta solução é apenas uma aproximação, admitindo que a resistência das armaduras do condensador é nula; na realidade essas armaduras terão uma pequena resistência  $r$ , a tensão não aumentará instantaneamente até  $\varepsilon$  mas demorará um tempo pequeno da ordem de  $rC$  e a corrente não será realmente infinita, mas sim muito elevada num pequeno intervalo de tempo da ordem de  $rC$ . Na resistência:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_R &= \frac{\varepsilon/7.2}{s(s+1/2.88)} & \Longrightarrow & \quad I_R = 0.4\varepsilon \left(1 - e^{-t/2.88}\right) \\ V_R &= 2.5I_R & \Longrightarrow & \quad V_R = \varepsilon \left(1 - e^{-t/2.88}\right) \end{aligned}$$

nomeadamente, a tensão aumenta exponencialmente, desde zero até  $\varepsilon$  volt, e a corrente aumenta exponencialmente, desde zero até  $\varepsilon/2.5$  mA. No indutor:

$$I_L = I_R = 0.4\varepsilon \left(1 - e^{-t/2.88}\right) \quad V_L = \varepsilon - V_R = \varepsilon e^{-t/2.88}$$

assim, a tensão decresce exponencialmente desde  $\varepsilon$  volt até 0 e a corrente aumenta exponencialmente desde 0 até  $\varepsilon/2.5$  mA.

Os resultados obtidos no exemplo anterior, no caso em que a tensão de entrada for contínua, podem ser corroborados tendo em conta que, para tensões constantes, após um tempo suficientemente elevado, um condensador comporta-se como um circuito aberto (impedância infinita porque a frequência é nula) e um indutor como um curto circuito (impedância nula porque a frequência é nula).

Assim, a corrente no condensador deverá aproximar-se de 0 e a tensão de  $\varepsilon$ . No indutor e na resistência a corrente deverá aproximar-se de  $\varepsilon/2.5$ ; a tensão na resistência aproxima-se para  $\varepsilon$  e no indutor para 0.

## 10.6. Função de transferência

Como as equações diferenciais dos circuitos com fontes, resistências, condensadores e indutores são sempre equações lineares, e se no instante  $t = 0$  todas as tensões e correntes forem nulas. A transformada de Laplace da equação do circuito poderá ser escrita como uma função  $P(s)$  vezes a transformada do sinal de entrada  $\tilde{V}(s)$  igual a outra função  $Q(s)$  vezes a transformada do sinal de saída,  $\tilde{V}_e(s)$ . Nomeadamente,

$$P(s)\tilde{V}(s) = Q(s)\tilde{V}_e(s) \quad (10.36)$$

e podemos escrever:

$$\tilde{V}(s) = \tilde{H}(s) \tilde{V}_e(s) \quad (10.37)$$

onde a função:

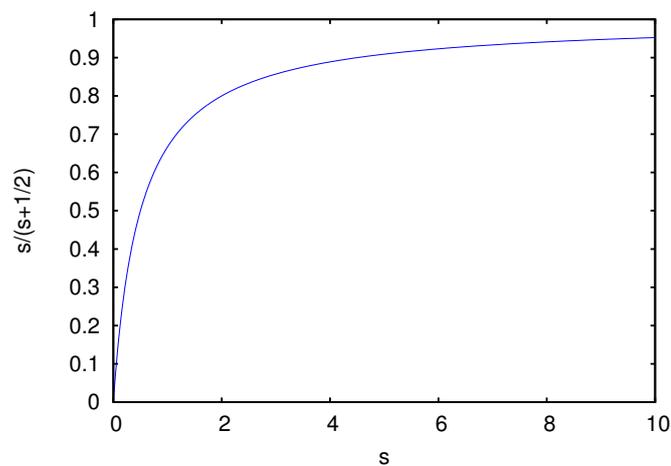
$$\tilde{H}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (10.38)$$

é designada de **função de transferência**. É de salientar que a função  $P(s)$  no denominador é o **polinómio característico** da respetiva equação diferencial homogénea. Portanto, os valores próprios da equação homogénea são pontos onde a função de transferência  $\tilde{H}$  é singular (infinita).

A vantagem de conhecer o a função de transferência de um circuito reside em que para calcular a saída para vários possíveis sinais de entrada, basta multiplicar  $\tilde{H}$  pelas transformadas de Laplace dos sinais de entrada,  $\tilde{V}_e$ , e a seguir calcular as transformadas inversas.

Por exemplo, no caso do circuito no exemplo 10.2, a função de transferência é obtida calculando  $\tilde{V}/\tilde{V}_e$  na equação 10.34:

$$\tilde{H}(s) = \frac{s}{s + 1/t_C} \quad (10.39)$$

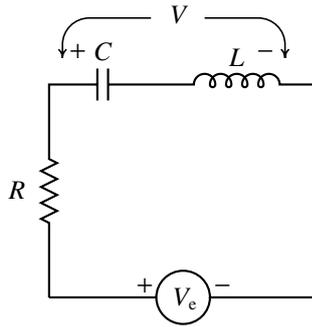


**Figura 10.10.:** Função de transferência de um filtro passa-alto com  $t_C = 2$ .

Quando a frequência  $s$  for igual a  $1/t_C$  a função de transferência é igual a 0.5. Se a frequência for menor que  $1/t_C$ ,  $\tilde{H}$  aproxima-se de 0 e se  $s$  for maior que  $1/t_C$ ,  $\tilde{H}$  aproxima-se de 1. Isso quer dizer que as frequências menores que a frequência de corte,  $1/t_C$ , serão atenuadas, enquanto que as frequências elevadas não sofrem muita atenuação, razão pela qual o circuito do exemplo 10.2 é denominado **filtro passa-alto**. A figura 10.10 mostra o gráfico dessa função de transferência, no caso específico em que  $t_C$  for igual a 2 unidades de tempo.

#### Exemplo 10.4

Encontre a função de transferência e a equação diferencial do circuito representado no diagrama.



**Resolução.** A impedância total do segmento onde está a ser medida a tensão  $V$  é:

$$Z_{LC} = \frac{1}{Cs} + Ls = \frac{Ls^2 + 1/C}{s}$$

e a impedância total do circuito é  $Z_{LC} + R$ . A transformada da corrente no circuito é:

$$\tilde{I} = \frac{s\tilde{V}_e}{Ls^2 + Rs + 1/C}$$

Assim, a transformada da tensão de saída é:

$$\tilde{V} = Z_{LC}\tilde{I} = \frac{Ls^2 + 1/C}{Ls^2 + Rs + 1/C}\tilde{V}_e$$

e a função de transferência é:

$$\tilde{H} = \frac{s^2 + 1/(t_C t_L)}{s^2 + s/t_L + 1/(t_C t_L)}$$

onde  $t_C = RC$  e  $t_L = L/R$ . O denominador de  $\tilde{H}$  é o polinómio caraterístico da equação do circuito e o numerador, multiplicado por  $\tilde{V}_e$  é a transformada do lado direito da equação; portanto, a equação diferencial do circuito é:

$$V'' + \frac{V'}{t_L} + \frac{V}{t_C t_L} = V_e'' + \frac{V_e}{t_C t_L}$$

## Perguntas

1. A equação diferencial de um circuito é:  $3V'' - 2V' + V = 2V_e'$ . Qual das seguintes funções representa a função de resposta do circuito?

A.  $\frac{2}{3s^2 - 2s + 1}$       D.  $\frac{-2}{3s^2 - 2s + 1}$   
 B.  $\frac{2s}{3s^2 - 2s + 1}$       E.  $\frac{2s}{s^2 - 2s + 3}$   
 C.  $\frac{2}{s^2 - 2s + 3}$

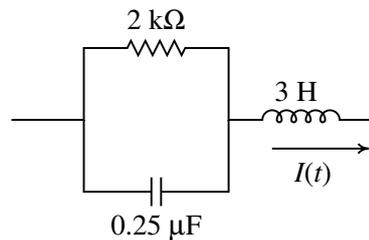
2. A função de transferência de um filtro é:

$$\tilde{H}(s) = \frac{s + 10}{2 - s}$$

Calcule a expressão para o sinal de saída  $V(t)$  quando o sinal de entrada for  $V_e(t) = e^{-t}$ .

A.  $3e^t - 4e^{2t}$       D.  $3e^{-t} - 4e^{2t}$   
 B.  $e^{-t} - 4e^{-2t}$       E.  $3e^t - 2e^{-2t}$   
 C.  $4e^{-t} - 3e^{-2t}$

3. No circuito do diagrama, sabendo que a corrente através do indutor é  $I(t) = e^{-2t}$  (em mA se o tempo estiver em ms), calcule a corrente através da resistência, em função do tempo.



A.  $(2+t)e^{-2t}$       D.  $2te^{-2t}$   
 B.  $2e^{-2t}$       E.  $0.5e^{-2t}$   
 C.  $e^{-2t}$

4. Uma resistência com valor  $R$ , um condensador com capacidade  $C$  e um indutor com indutância  $L$  estão ligados em paralelo entre dois pontos de um circuito. Calcule a impedância equivalente desse sistema em paralelo.

A.  $\frac{RLs}{RLCs^2 + Ls + R}$   
 B.  $\frac{RLs}{LCs^2 + RCs + 1}$   
 C.  $\frac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs}$   
 D.  $\frac{RLCs^2 + Ls + R}{RLs}$   
 E.  $\frac{LCs^2 + RCs + 1}{RLs}$

5. Quando a entrada num circuito é a tensão contínua  $V_e = 5$ , a saída é  $2.5(1 - e^{-2t})$ . Se no mesmo circuito a entrada for  $5e^{-t}$  qual será a saída?

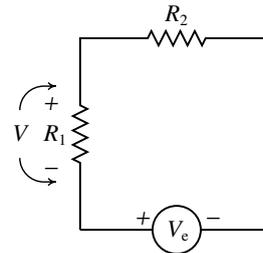
A.  $2.5e^{-t}(1 - e^{-2t})$   
 B.  $5e^{-t}(1 - e^{-2t})$   
 C.  $2.5e^{-t}(1 - e^{-t})$   
 D.  $5e^{-t}(1 - e^{-t})$   
 E.  $2.5(1 - e^{-2(t+1)})$

## Problemas

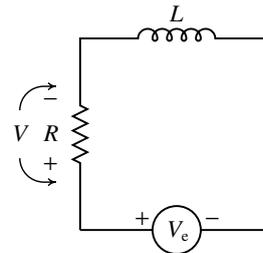
1. Um condensador de  $50 \mu\text{F}$  é carregado usando uma fonte com fem de  $6 \text{ V}$  e resistência interna de  $350 \Omega$ , através de uma resistência de  $100 \text{ k}\Omega$ . (a) Calcule a corrente inicial no instante  $t = 0$  em que é ligada a fonte. (b) Num instante  $t_1 > 0$ , a corrente é de  $20 \mu\text{A}$ ; calcule as diferenças de potencial no condensador e na resistência nesse instante. (c) Calcule a carga armazenada no condensador em  $t_1$ . (d) Calcule o valor de  $t_1$ .

2. A memória RAM de um computador funciona com uma fonte de alimentação de 5 V, extraindo uma corrente de 80 mA. O conteúdo da memória será apagado se a tensão de alimentação diminuir por baixo de 3 V. Para proteger os dados na memória em caso de cortes na fonte de alimentação, liga-se um condensador de 1 F aos terminais da fonte de alimentação. Faça uma estimativa do tempo que o condensador poderá manter os dados na memória. Deverá admitir que a única resistência no circuito é a da memória RAM.
3. Uma resistência de 3 k $\Omega$  e um condensador de 5 nF estão ligados em série a uma fonte com tensão  $V_e(t) = 2 - 2t$ , entre  $t = 0$  e  $t = 4$ , e  $V_e(t) = 0$  nos outros instantes ( $t$  medido em  $\mu$ s e  $V_e$  em V). Calcule a corrente no circuito em qualquer instante  $t > 0$ .

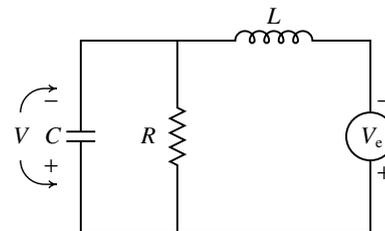
4. O circuito na figura é um **atenuador inversor** (repare na posição dos sinais positivo e negativo da saída). (a) Encontre a equação do circuito. (b) Calcule a função de transferência. (c) Explique a designação de atenuador inversor.



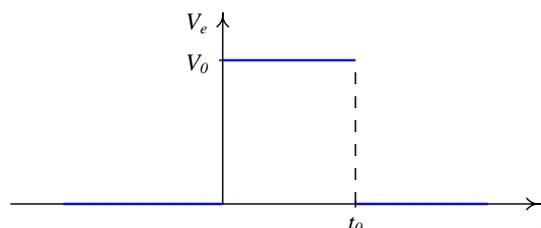
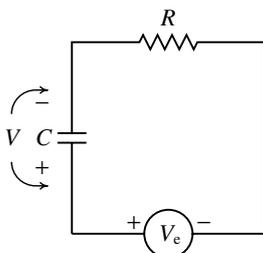
5. Para o circuito LR na figura: (a) Encontre a função de transferência. (b) Calcule a tensão  $V(t)$  no caso em que o sinal de entrada for uma fonte de tensão contínua com força eletromotriz  $V_e = \varepsilon$ . (c) Desenhe o gráfico do sinal  $V(t)$  calculado na alínea anterior.



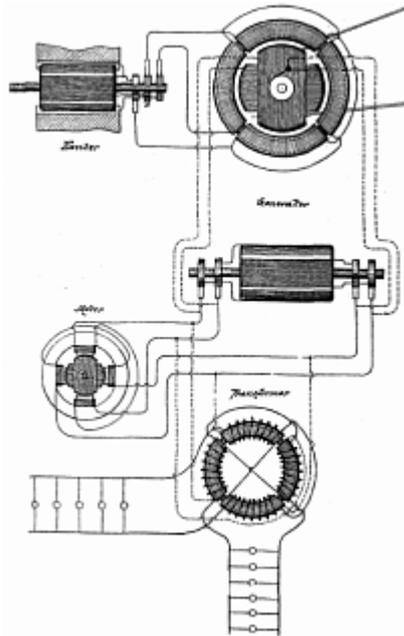
6. No circuito da figura: (a) Calcule a impedância total, em função de  $s$ . (b) Calcule a transformada da corrente que passa pelo indutor. (c) Se a tensão de saída for medida no condensador, encontre a função de transferência. (d) Escreva a equação diferencial para a tensão de saída.



7. O circuito na figura é denominado **filtro passa-baixo**. Escreva a equação que relaciona o sinal de saída com o sinal de entrada. Encontre a função de transferência do sistema e determine o sinal de saída quando o sinal de entrada for o que está indicado no lado direito da figura. Explique porque este circuito é designado de filtro passa-baixo.



# 11. Circuitos de corrente alternada

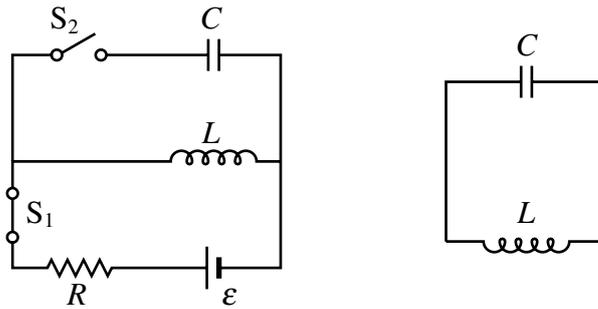


No fim da década de 1880 viveu-se nos Estados Unidos da América um período conhecido como a **Guerra das Correntes**. Nessa época já existia uma rede elétrica pública, usada principalmente para acender lâmpadas incandescentes e alimentar motores elétricos. A exploração dessa rede elétrica revertia grandes benefícios a Thomas A. Edison que tinha obtido várias patentes pela invenção da lâmpada e outros dispositivos para gerar corrente contínua. Outras pessoas tentaram entrar nesse novo negócio milionário com as suas inovações; George Westinghouse, quem já tinha tido sucesso comercializando as suas próprias patentes, contratou Nicola Tesla, um cientista brilhante, imigrante da Croácia. Tesla obteve uma patente pelo dispositivo na figura acima, para produzir e distribuir corrente alternada. A guerra das correntes acabaria por ser ganha pelo sistema de corrente alternada de Tesla e Westinghouse; uma das principais vantagens sobre o sistema de corrente contínua de Edison é a facilidade de poder aumentar ou diminuir a tensão por meio de transformadores.

As perdas de energia na transmissão de corrente em grandes distâncias são menores quanto maior for a tensão usada. Usa-se alta tensão para transferir a corrente desde as centrais elétricas até as localidades; a tensão deve ser reduzida antes de ser disponibilizada para o consumo doméstico, para reduzir os riscos de segurança.

## 11.1. Circuito LC

No circuito do lado esquerdo da figura 11.1, o interruptor  $S_1$  tem estado fechado durante muito tempo e o interruptor  $S_2$  aberto. Num instante que designamos  $t = 0$  abre-se o interruptor  $S_1$  e, simultaneamente, fecha-se o interruptor  $S_2$ . Assim, para  $t \geq 0$  o circuito equivalente é o que aparece no lado direito da figura.



**Figura 11.1.:** Circuito LC, em  $t < 0$  (lado esquerdo) e circuito equivalente para  $t \geq 0$  (lado direito) em que  $S_1$  está aberto e  $S_2$  fechado.

A impedância do condensador é  $1/(Cs)$  e a do indutor é  $Ls$ . A lei de Ohm generalizada,  $\tilde{V} = Z\tilde{I}$  deixa de ser válida para o indutor, porque no instante  $t = 0$  a sua corrente não era nula. Lembrando que a lei de Ohm foi obtida transformando a expressão para os indutores:

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad (11.1)$$

vemos que, para os indutores, a forma mais geral da lei de Ohm seria:

$$\tilde{V} = L (s\tilde{I} - I_0) \quad (11.2)$$

Com o condensador não há problema, porque neste caso admitimos que a sua carga inicial é nula, assim que a transformada da sua tensão é  $Z\tilde{I} = \tilde{I}/(Cs)$ . Outra diferença com os circuitos estudados anteriormente é que, quando não há fontes, os condensadores e indutores deixam de ser elementos passivos que respondem às mudanças na fonte; neste caso em cada instante um dos elementos será passivo (perde energia) e o outro será ativo (absorve energia). Conseqüentemente, as tensões no condensador e o indutor serão iguais em valor absoluto, mas com sinais opostos e a equação do circuito será:

$$L (s\tilde{I} - I_0) = \frac{\tilde{I}}{Cs} \quad \implies \quad s^2\tilde{I} - sI_0 = -\frac{\tilde{I}}{LC} \quad (11.3)$$

esta equação algébrica é a transformada da equação diferencial do circuito:

$$I'' = -\frac{I}{LC} \quad (11.4)$$

A equação diferencial 11.4 é a equação de um **oscilador harmônico simples**, que foi estudado na Física 1. A matriz jacobiana dessa equação linear tem valores próprios imaginários  $\pm i\sqrt{1/(LC)}$  e a solução da equação é

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (11.5)$$

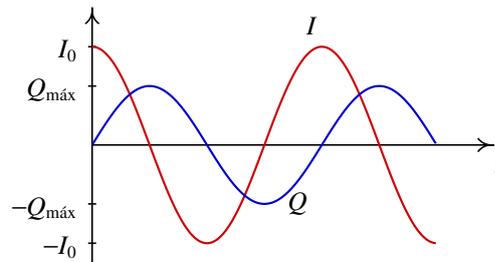
em que  $\omega$  é a frequência angular do circuito,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.6)$$

A carga no condensador, em função do tempo, será:

$$Q(t) = C \Delta V = -CL \frac{dI}{dt} = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (11.7)$$

Assim, a corrente e a carga oscilam com frequência  $f = \omega/(2\pi)$ , desfasadas de forma que quando uma delas for nula, a outra terá o seu valor absoluto máximo (figura 11.2).



**Figura 11.2.:** Corrente e carga no circuito LC ( $Q_{\text{máx}} = I_0/\omega$ ).

A corrente 11.5 é designada **corrente alternada** e a carga 11.7 é uma carga alternada. No capítulo sobre indução eletromagnética vimos também um dispositivo que produz uma tensão alternada (equação 9.10). Em geral, uma função alternada é qualquer função periódica com valor médio igual a zero. Estes 3 exemplos são um caso particular em que a forma da função é como na função seno ou cosseno.

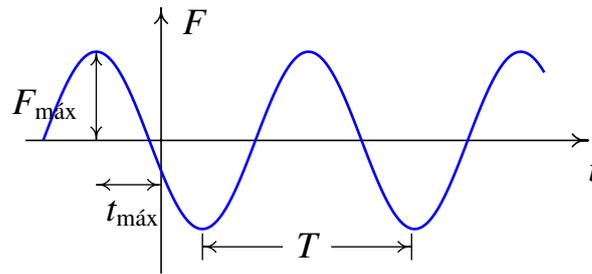
## 11.2. Funções sinusoidais

Uma **função sinusoidal**  $F(t)$  é uma função periódica que oscila entre dois valores  $-F_{\text{máx}}$  e  $F_{\text{máx}}$ , com a mesma forma de uma função seno ou cosseno, como mostra a figura 11.3.

A distância  $T$  entre dois máximos ou dois mínimos sucessivos é o **período** da função e o seu inverso,  $f = 1/T$ , é a **frequência**.

Se designarmos por  $t_{\text{máx}}$  a distância entre o ponto no eixo do tempo, onde a função atinge o seu valor máximo  $F_{\text{máx}}$  antes de  $t = 0$ , e a origem, a **fase** da função é:

$$\varphi = 2\pi \left( \frac{t_{\text{máx}}}{T} \right) \quad (11.8)$$



**Figura 11.3.:** Função sinusoidal com período  $T$  e valor máximo  $F_{\text{máx}}$ .

Consequentemente, as funções sinusoidais têm todas a forma geral:

$$F(t) = F_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (11.9)$$

onde  $\omega$  é a **frequência angular**:

$$\omega = 2\pi f \quad (11.10)$$

Repare que existem várias formas de representar a mesma função. Podíamos substituir o cosseno por seno e subtrair  $\pi/2$  à fase, sem alterar nada. Podíamos também inverter o sinal da frequência e da fase e somar ou subtrair à fase qualquer múltiplo de  $2\pi$ .

No entanto, para poder garantir que duas funções sinusoidais são iguais unicamente se tiverem igual valor máximo, frequência e fase, vamos limitar-nos a usar unicamente a função cosseno, frequências positivas e fases no intervalo  $[0, 2\pi[$ . Essas 3 escolhas são arbitrárias, mas habituais. Assim cada função sinusoidal é caracterizada por  $F_{\text{máx}}$ ,  $\omega$  e  $\varphi$ . Duas funções sinusoidais que não tenham o mesmo valor máximo, frequência angular e fase, serão necessariamente diferentes.<sup>1</sup>

## 11.3. Fasores

As funções sinusoidais com a forma 11.8 podem ainda ser escritas usando a fórmula de Euler e a função  $\text{Re}()$  que extrai a parte real de um número complexo:

$$F_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}\left(F_{\text{máx}} e^{i(\omega t + \varphi)}\right) = \text{Re}\left(F_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t}\right) \quad (11.11)$$

Essa forma facilita a identificação de uma propriedade importante para a soma de duas funções sinusoidais com diferentes valores máximos e fases, mas com a mesma frequência:

$$\begin{aligned} \text{Re}\left(F_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t}\right) + \text{Re}\left(G_{\text{máx}} e^{i\phi} e^{i\omega t}\right) &= \text{Re}\left(F_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t} + G_{\text{máx}} e^{i\phi} e^{i\omega t}\right) \\ &= \text{Re}\left(\left(F_{\text{máx}} e^{i\varphi} + G_{\text{máx}} e^{i\phi}\right) e^{i\omega t}\right) \end{aligned} \quad (11.12)$$

<sup>1</sup>Os valores de  $T$ ,  $f$  e  $\omega$  estão relacionados; se um deles for conhecido, os outros dois podem ser calculados.

Nomeadamente, a soma de duas funções sinusoidais com a mesma frequência é também uma função sinusoidal com a mesma frequência.

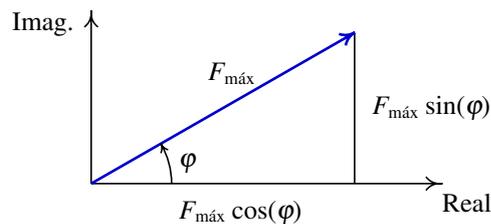
Quando trabalharmos com várias funções sinusoidais, todas com a mesma frequência, podemos admitir implicitamente a função  $\text{Re}()$  e a parte que depende do tempo,  $e^{i\omega t}$ , representando cada função pelos números complexos que multiplicam a essa exponencial:

$$\mathbb{F} = F_{\text{máx}} e^{i\varphi}, \quad \mathbb{G} = G_{\text{máx}} e^{i\phi}, \quad \mathbb{H} = H_{\text{máx}} e^{i\psi} \dots \quad (11.13)$$

Essas expressões que definem o valor máximo e a fase das funções sinusoidais são denominadas **fasores**. Estamos a usar letras especiais para lembrar que podem ser somadas mas não multiplicadas como números complexos ordinários, já que representam só uma parte da expressão completa da função.

O fasor correspondente à soma de duas funções sinusoidais de igual frequência é igual à soma dos fasores das duas funções, como foi demonstrado na equação 11.12. No entanto, o fasor do produto de duas funções sinusoidais de igual frequência não existe, já que o resultado não é outra função sinusoidal.

Outra forma útil de representar os fasores consiste em escrever o seu valor máximo e a fase separados pelo símbolo de ângulo:  $\mathbb{F} = F_{\text{máx}} \angle \varphi$ . É também útil a representação gráfica, em que o fasor é uma seta no plano complexo (ver figura 11.4).



**Figura 11.4.:** Representação gráfica de um fasor  $\mathbb{F}$ .

### Exemplo 11.1

Num nó num circuito de corrente alternada entram duas correntes e saem outras duas correntes. Sabendo que as expressões das correntes que entram são  $\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4)$  e  $2\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4)$ , e uma das correntes que sai é  $(3 - \sqrt{3}) \cos(\omega t)$ , calcule a outra corrente que sai, indicando o seu valor máximo e a sua fase.

**Resolução.** Em termos matemáticos, o que nos está a ser pedido é calcular:

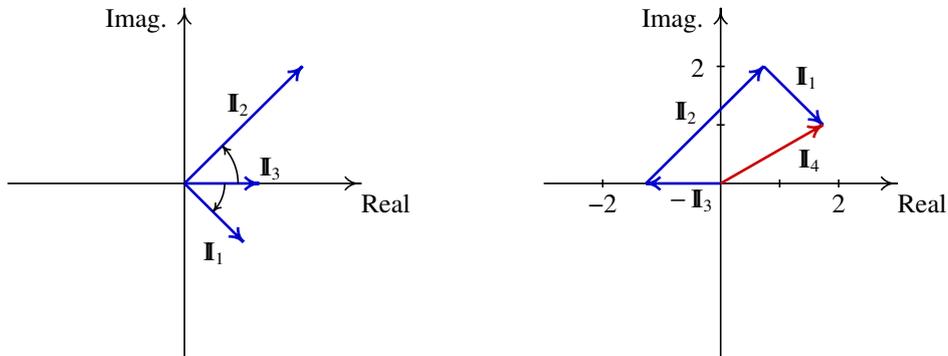
$$\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4) + 2\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4) - (3 - \sqrt{3}) \cos(\omega t)$$

combinando as 3 funções de forma a obter uma única função cosseno.

Começaremos por escrever os fasores das 3 correntes. No caso da primeira corrente será preciso subtrair  $\pi/2$  à fase, para substituir o seno por cosseno. O fasor da quarta corrente será a soma dos dois primeiros fasores, menos o terceiro:

$$\mathbb{I}_4 = \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 - \mathbb{I}_3 = \left( \sqrt{2} \angle -\pi/4 \right) + \left( 2\sqrt{2} \angle \pi/4 \right) - \left( 3 - \sqrt{3} \angle 0 \right)$$

A seguir, calculamos as partes real e imaginária de cada fasor, tarefa essa que será facilitada usando a representação gráfica (lado esquerdo na figura 11.5).



**Figura 11.5.:** Soma de fasores.

Assim, o fasor da quarta corrente é:

$$\mathbb{I}_4 = (1 - i) + (2 + i2) - (3 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} + i$$

O valor máximo desse fasor será a hipotenusa do triângulo retângulo com catetos de  $\sqrt{3}$  e 1 unidades, nomeadamente  $I_{\text{máx}} = 2$ . A fase é o ângulo oposto ao cateto de comprimento 1 nesse triângulo retângulo,  $\varphi = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$ . O resultado obtido é:

$$I_4(t) = \sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4) + 2\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4) - (3 - \sqrt{3}) \cos(\omega) = 2 \cos(\omega t + \pi/6)$$

Embora os fasores não sejam verdadeiros vetores, somam-se exatamente como se fossem vetores, somando coordenadas, ou geometricamente, como no lado direito da figura 11.5.

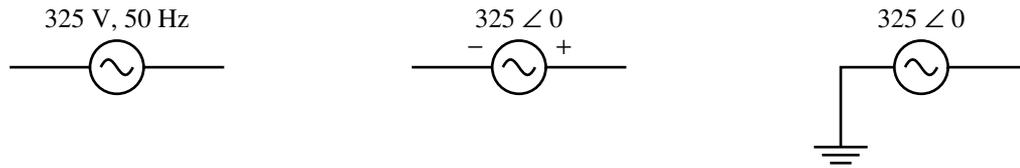
## 11.4. Tensão alternada

Uma tensão alternada é um sinal sinusoidal:

$$V = V_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (11.14)$$

Nos diagramas de circuito, uma fonte ideal de tensão alternada representa-se pelo símbolo na figura 11.6. Junto do diagrama indica-se a tensão máxima e a frequência. Os valores apresentados na figura são os que estão em uso na rede elétrica pública da União Europeia: frequência  $f$  de 50 Hz e tensão máxima de 325 V.

O instante em que arbitramos  $t = 0$  pode ser escolhido de forma a fazer com que a fase da tensão seja nula. Uma vez fixarmos um valor para a fase, é importante indicar qual a diferença de potencial que o fasor representa: o potencial do terminal identificado com o



**Figura 11.6.:** Diagrama de circuito para uma fonte ideal de tensão alternada (esquerda) e representação da tensão da rede elétrica pública na Europa (direita).

sinal + menos o potencial do terminal com o sinal  $-$ . Os sinais indicados nos terminais da fonte indicam que o terminal positivo está a maior potencial que o negativo, no instante  $t = 0$ , mas meio período mais tarde o terminal positivo estará a menor potencial que o terminal negativo.

Se usarmos uma ligação a terra no circuito, como no lado direito da figura 11.6, o fasor da tensão representará a diferença de potencial entre o terminal que não está ligado à terra e a terra. Nesse caso não será necessário indicar sinais nos terminais da fonte.

## 11.5. Impedância complexa

Se todas as fontes de tensão num circuito forem fontes de tensão alternada com a mesma frequência, em qualquer parte do circuito a tensão também será alternada, com a mesma frequência, já que a regra das malhas garante que a tensão será igual à soma das outras tensões na mesma malha, som sinal oposto. Vimos também que a soma/subtração de funções sinusoidais com a mesma frequência é também uma função sinusoidal com a mesma frequência.

No capítulo anterior obtivemos a lei de Ohm generalizada para para as transformadas de Laplace da tensão e da corrente (equação 10.29):

$$\tilde{V}(s) = Z(s)\tilde{I}(s) \quad (11.15)$$

Como  $V$  é uma função sinusoidal, a sua transformada de Laplace é (ver apêndice A):

$$\tilde{V}(s) = \frac{V}{s - i\omega} \quad (11.16)$$

e, portanto,

$$\tilde{I}(s) = \frac{V}{(s - i\omega)Z(s)} \quad (11.17)$$

Admitindo que  $Z(i\omega)$  não seja igual a zero, a expansão em frações parciais da expressão no lado direito deverá ter um termo com denominador  $(s - i\omega)$

$$\tilde{I}(s) = \frac{I}{s - i\omega} + \tilde{I}_{\text{trans}}(s) \quad (11.18)$$

onde o termo  $\tilde{I}_{\text{trans}}$  é a corrente transitória, que não terá nenhum fator  $(s - i\omega)$  no denominador.

Substituindo essa expressão e a transformada da tensão na lei de Ohm generalizada, temos:

$$\frac{\mathbb{V}}{s - i\omega} = Z(s) \left( \frac{\mathbb{I}}{s - i\omega} + \tilde{I}_{\text{transit.}} \right) \quad (11.19)$$

Multiplicando os dois lados da equação por  $(s - i\omega)$  e substituindo  $s$  por  $i\omega$  obtemos o seguinte resultado:

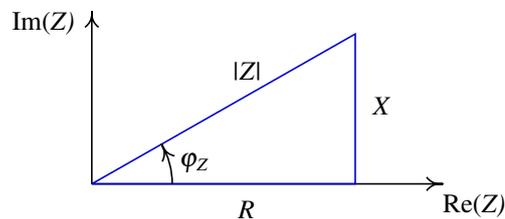
$$\boxed{\mathbb{V} = Z(i\omega)\mathbb{I}} \quad (11.20)$$

Isto é, os fasores da tensão e da corrente também verificam a lei de Ohm, mas a frequência real  $s$  foi substituída por uma frequência imaginária  $i\omega$ , que conduzirá a uma **impedância complexa**  $Z(i\omega)$ .<sup>2</sup>

A impedância complexa  $Z(i\omega)$  é uma função complexa que pode ser dividida na sua parte real e parte imaginária:

$$\boxed{Z(i\omega) = R(\omega) + iX(\omega)} \quad (11.21)$$

onde a função real  $R(\omega)$ , e designada de **resistência** e a função real  $X(\omega)$  é designada de **reatância**. A função da resistência é sempre positiva, enquanto que a reatância pode ter valores positivos, denominados **reatância indutiva** ou negativos, denominados **reatância capacitiva**.



**Figura 11.7.:** Triângulo de impedância, com a resistência  $R$  e a reatância  $X$  nos catetos.

Para um determinado valor de  $\omega$ , o módulo  $|Z|$  e o argumento  $\varphi_Z$  da impedância complexa  $Z(i\omega)$  podem ser calculados usando a representação gráfica de  $R + iX$  no plano complexo, obtendo o **triângulo de impedância** apresentado na figura 11.7. Como  $R$  não pode ser negativa, o ângulo  $\varphi_Z$  estará sempre entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$  radianos.

Repare que a impedância complexa  $Z(i\omega)$  não é um fasor. Podemos multiplicar e somar impedâncias complexas como números complexos ordinários. Também podemos multiplicar ou dividir um fasor por várias impedâncias e o resultado será outro fasor com a mesma frequência.

<sup>2</sup>Em muitos livros não é introduzida a impedância generalizada  $Z(s)$  e a impedância complexa  $Z(i\omega)$  é designada simplesmente por impedância  $Z(\omega)$ . Estamos a falar da mesma função complexa, quer seja designada por  $Z(\omega)$  ou  $Z(i\omega)$ .

Se os fasores da tensão e da corrente fossem  $V_{\text{máx}} \angle \varphi_V$  e  $I_{\text{máx}} \angle \varphi_I$ , a lei de Ohm para os fasores (equação 11.20) dá:

$$V_{\text{máx}} \angle \varphi_V = (|Z| I_{\text{máx}}) \angle (\varphi_Z + \varphi_I) \quad (11.22)$$

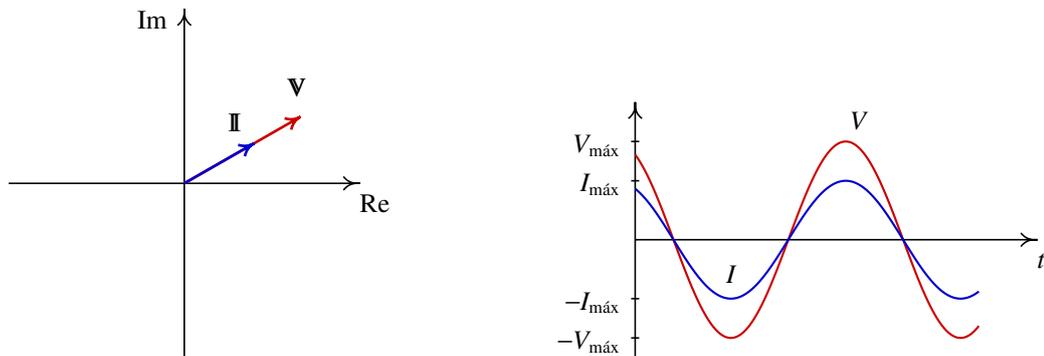
e, portanto, podemos separar a equação complexa 11.20 em duas equações reais:

$$V_{\text{máx}} = |Z| I_{\text{máx}} \quad \varphi_V = \varphi_Z + \varphi_I \quad (11.23)$$

## Resistências

Numa resistência, a impedância é independente da frequência e igual a  $R$ . Consequentemente  $|Z| = R$  e  $\varphi_Z = 0$ . As equações 11.23 indicam que as fases de  $V$  e  $I$  são iguais, e os seus valores máximos verificam a relação:

$$V_{\text{máx}} = R I_{\text{máx}} \quad (11.24)$$



**Figura 11.8.:** Fasores da tensão e da corrente numa resistência.

A figura 11.8 mostra os fasores e as respectivas funções sinusoidais na resistência. Diz-se que a tensão e a corrente estão **em fase**: os dois fasores têm a mesma direção e sentido, de forma que as duas funções atingem os seus valores máximos e mínimos nos mesmos instantes. Podemos imaginar os dois fasores a rodarem, no sentido anti-horário, com velocidade angular  $\omega$  e o valor das funções serão as projeções dos fasores no eixo real.

## Condensadores

Nos condensadores, a impedância generalizada é  $1/(Cs)$  e, portanto, a impedância complexa será:

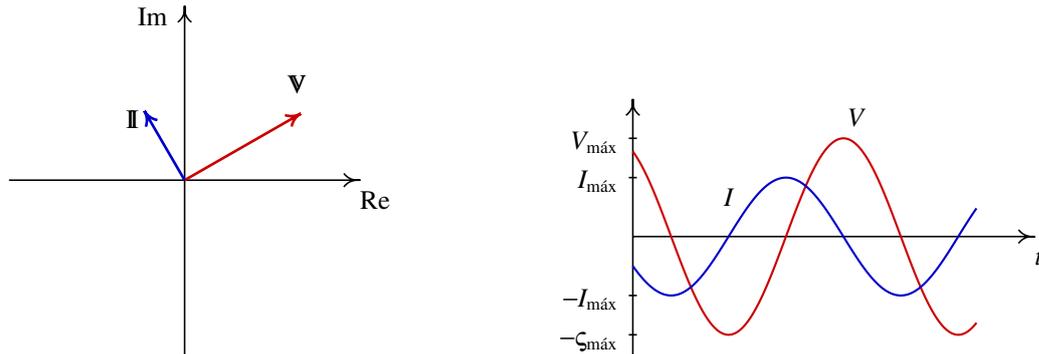
$$Z(i\omega) = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2} \quad (11.25)$$

nomeadamente, a reatância de um condensador é negativa e inversamente proporcional à frequência angular:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (11.26)$$

e a sua resistência é nula.

Aplicando as equações 11.23 obtemos  $\mathbb{I} = V_{\text{máx}} \omega C \angle (\phi_V + \pi/2)$ . a fase da corrente é  $\pi/2$  maior que o da tensão. Na representação gráfica dos fasores (figura 11.9) o fasor da corrente é perpendicular ao da tensão e está adiantado; no gráfico das funções sinusoidais (figura 11.9) esse adiantamento de  $\pi/2$  manifesta-se de forma a que cada vez que  $I(t)$  atinge o seu valor máximo,  $V(t)$  só atinge o seu valor máximo um quarto do período mais tarde.

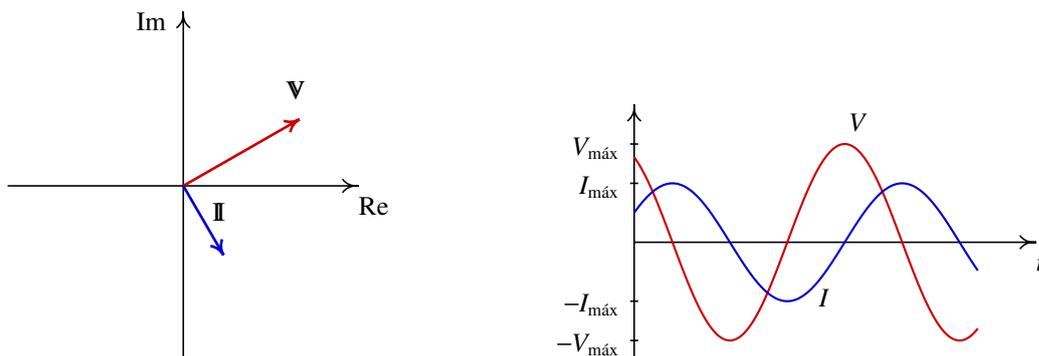


**Figura 11.9.:** Fasores da tensão e da corrente num condensador.

## Indutores

Nos indutores, a impedância generalizada é  $Ls$  e, portanto, a impedância complexa será:

$$Z(i\omega) = i\omega L = \omega L \angle \pi/2 \quad (11.27)$$



**Figura 11.10.:** Fasores da tensão e da corrente num indutor.

A reatância de um indutor é positiva e diretamente proporcional à frequência angular:

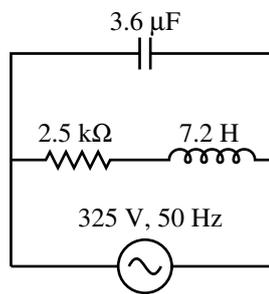
$$X_L = \omega L \quad (11.28)$$

e a sua resistência é nula.

Aplicando as equações 11.23 obtemos  $\mathbb{I} = V_{\text{máx}}/(\omega L) \angle (\varphi_V - \pi/2)$ . a fase da corrente é  $\pi/2$  menor que a da tensão. Na representação gráfica dos fasores (figura 11.10) o fasor da corrente é perpendicular ao da tensão e está atrasado. No gráfico das funções sinusoidais (figura 11.10) esse atraso de  $\pi/2$  manifesta-se de forma a que  $I(t)$  atinge os seus valores máximos sempre um quarto do período mais tarde do que o instante em que  $V(t)$  foi máxima.

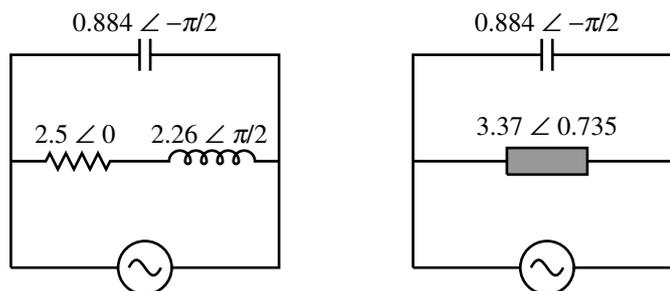
### Exemplo 11.2

Calcule a tensão e corrente instantâneas em todos os elementos do circuito representado no diagrama.

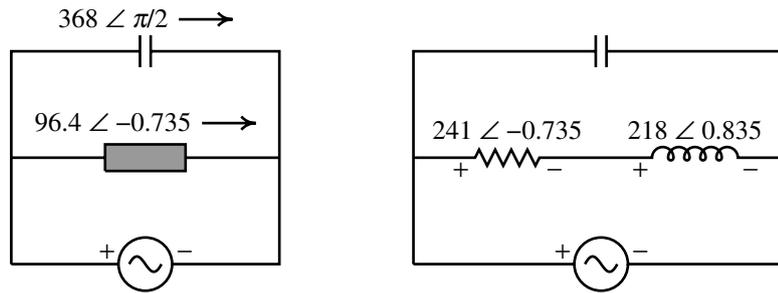


**Resolução.** Este é o mesmo circuito analisado no exemplo 10.3 do capítulo anterior. Usaremos o mesmo sistema de unidades escolhido nesse exemplo: impedância em  $\text{k}\Omega$ , capacidade em  $\mu\text{F}$ , indutância em H, tempo em ms, frequência em kHz, tensão em V e corrente em mA. A frequência angular da fonte é:  $\omega = 2 \times \pi \times 50 \text{ Hz}$ , mas como deve ser escrita em kHz, terá o valor  $= \pi/10$ .

A impedância da resistência é 2.5, a do condensador  $10/(3.6\pi) \angle -\pi/2 = 0.884 \angle -\pi/2$  e a do indutor é  $7.2\pi/10 \angle \pi/2 = 2.26 \angle \pi/2$ . Como a resistência está em série com o indutor, podemos substituí-los por um único elemento com impedância igual à soma das impedâncias:



Como os dois elementos no circuito simplificado estão em paralelo, o fasor da tensão será o mesmo nos dois, igual ao fasor da fonte:  $325 \angle 0$ . Dividindo esse fasor pelas impedâncias dos dois elementos calculam-se as correntes neles. A seguir, multiplicando o fasor da segunda corrente pelas impedâncias da resistência e do indutor, calculam-se os fasores das suas tensões:



A partir dos fasores podemos escrever as tensões e correntes instantâneas:

$$\begin{array}{lll}
 \text{condensador:} & V = 325 \cos(0.1 \pi t) & I = 368 \cos(0.1 \pi t + \pi/2) \\
 \text{resistência:} & V = 241 \cos(0.1 \pi t - 0.735) & I = 96.4 \cos(0.1 \pi t - 0.735) \\
 \text{indutor:} & V = 218 \cos(0.1 \pi t + 0.835) & I = 96.4 \cos(0.1 \pi t - 0.735)
 \end{array}$$

Vamos também mostrar a resolução deste exemplo usando o Maxima. As impedâncias do condensador, resistência e indutor serão designadas por  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ , e  $z_4$  será a impedância da associação da resistência e o indutor em série. Para obter maior precisão numérica, escreveremos os valores dados no enunciado na forma de números racionais:

```
(%i1) s: %i*pi/10$
(%i2) z1: 10/36/s$
(%i3) z2: 5/2$
(%i4) z3: 72*s/10$
(%i5) z4: z2 + z3$
```

Os fasores da tensão e a corrente no condensador são:

```
(%i6) v1: 325$
(%i7) I1: v1/z1$
```

A corrente máxima e a fase são o módulo e o argumento do número complexo  $I_1$ , que no Maxima são obtidos com as funções `cabs` e `carg`:

```
(%i8) float(cabs(I1));
(%o8) 367.5663404700058
(%i9) carg(I1);
(%o9) %pi
      ---
      2
```

Os fasores da corrente e as tensões na resistência e no indutor são:

```
(%i10) I4: v1/z4$
(%i11) float(cabs(I4));
(%o11) 96.39884655483593
(%i12) float(carg(I4));
(%o12) - .7354489942158552
(%i13) V2: I4*z2$
(%i14) float(cabs(V2));
```

```

(%o14)                240.9971163870898
(%i15) float (carg (V2) );
(%o15)                - .7354489942158552
(%i16) V3: I4*z3$
(%i17) float (cabs (V3) );
(%o17)                218.0490538688657
(%i18) float (carg (V3) );
(%o18)                .8353473325790414

```

## 11.6. Potência dissipada nos circuitos

Em qualquer ponto num circuito de corrente alternada, a corrente é uma função sinusoidal. Em cada período de oscilação, a mudança de sinal da função sinusoidal indica que o sentido da corrente muda. O integral da função, em cada período é nulo. Isso quer dizer que a carga transferida é nula; durante metade do período há transporte de carga num sentido, mas no restante meio período a mesma carga é transportada no sentido inverso.

Não existe transferência efetiva de carga nos circuitos de corrente alternada. As cargas de condução simplesmente oscilam à volta de uma posição de equilíbrio. Apesar de não existir transferência efetiva de cargas, existirá dissipação efetiva de energia, porque a oscilação das cargas está a ser contrariada pela resistência dos condutores e existe efeito Joule, independentemente do sentido da corrente.

Em qualquer dispositivo passivo dentro de um circuito com uma fonte de tensão alternada, após uma possível resposta transitória inicial, a tensão e a corrente serão funções sinusoidais com a mesma frequência da fonte:

$$V(t) = V_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi_V) \quad I(t) = I_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi_I) \quad (11.29)$$

A **potência instantânea**,  $P(t)$ , é a potência no dispositivo em qualquer instante  $t$ :

$$P(t) = V(t)I(t) = V_{\text{máx}}I_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi_V) \cos(\omega t + \varphi_I) \quad (11.30)$$

Usando uma relação trigonométrica para o produto de dois cossenos e o facto de que  $(\varphi_V - \varphi_I) = \varphi_Z$  (equação 11.23), a expressão anterior é equivalente a:

$$P(t) = \frac{1}{2} V_{\text{máx}} I_{\text{máx}} [\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) + \cos(\varphi_Z)] \quad (11.31)$$

Observe que o primeiro cosseno dentro dos parêntesis retos em 11.31 é uma função sinusoidal, mas o segundo cosseno não é função sinusoidal mas sim uma função constante. Consequentemente, o resultado de ter multiplicado duas funções sinusoidais não é outra função sinusoidal, mas uma função sinusoidal (com o dobro da frequência) deslocada no eixo das ordenadas.

A potência instantânea 11.31 poderá ser positiva e negativa em alguns intervalos e nula em alguns instantes. Como  $\varphi_Z$  está entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ , o deslocamento  $\cos(\varphi_Z)$  estará entre 0 e 1. Se a reatância for nula (dispositivo resistivo),  $\varphi_Z = 0$ ,  $\cos(\varphi_Z) = 1$ , e, portanto, a potência instantânea será sempre positiva, indicando que o dispositivo está sempre a dissipar energia.

Se a resistência for nula (dispositivo reativo),  $\varphi_Z = \pm\pi/2$ ,  $\cos(\varphi_Z) = 0$ , e, portanto, os intervalos em que a potência instantânea é positiva (dissipação de energia) são do mesmo comprimento que os intervalos em que é negativa (fornecimento de energia) e a potência média será nula. No caso geral,  $0 < \cos(\varphi_Z) < 1$  e os intervalos em que há dissipação de energia são mais compridos que os intervalos em que há fornecimento de energia.

O valor médio da potência,  $\bar{P}$ , calcula-se integrando a função 11.31 durante um período e dividindo pelo período. O integral do primeiro termo, durante um período, é nulo, enquanto o valor médio do termo constante será igual a si próprio.

Consequentemente, a **potência média** é igual a:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_{\text{máx}} I_{\text{máx}} \cos \varphi_Z \quad (11.32)$$

e será sempre positiva ou nula, indicando que, em média o dispositivo passivo não pode fornecer energia. O termo  $\cos \varphi_Z$ , que estará entre 0 e 1, designa-se de **fator de potência**.

É também habitual definir a **tensão eficaz** e a **corrente eficaz**:

$$V_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} \quad I_{\text{ef}} = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} \quad (11.33)$$

Assim, a potência média também pode ser calculada com a expressão:  $\bar{P} = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi_Z$ .

A tensão máxima de 325 V usada na União Europeia corresponde a uma tensão eficaz de 230 V. No continente americano usa-se tensão máxima de 170 V, a 60 Hz, que corresponde a uma tensão eficaz de 120 V.

## 11.7. Filtros de frequência

A equação 10.37 obtida no capítulo anterior é válida para qualquer sinal de entrada. Para um sinal de entrada  $V_e$  alternado, usando a expressão para a transformada de Laplace das funções sinusoidais (apêndice A) obtemos:

$$\tilde{V}(s) = \frac{V_e \tilde{H}(s)}{s - i\omega} \quad (11.34)$$

Se  $\tilde{H}(i\omega)$  tiver um valor finito, a expansão de  $\tilde{V}$  em frações parciais será:

$$\tilde{V}(s) = \frac{V}{s - i\omega} + \tilde{V}_{\text{trans}}(s) \quad (11.35)$$

onde  $\mathbb{V}$  é um número complexo, que corresponde ao fasor da saída (após a resposta transitória), e o termo  $\tilde{V}_{\text{trans}}$  é a transformada da tensão de resposta transitória, que não terá nenhum fator  $(s - i\omega)$  no denominador.

Substituindo essa expansão na equação 11.34, temos:

$$\frac{\mathbb{V}}{s - i\omega} + \tilde{V}_{\text{trans}}(s) = \frac{\mathbb{V}_e \tilde{H}(s)}{s - i\omega} \quad (11.36)$$

Multiplicando os dois lados da equação por  $(s - i\omega)$  e substituindo  $s$  por  $i\omega$  obtemos o seguinte resultado:

$$\boxed{\mathbb{V} = R(\omega) \mathbb{V}_e} \quad (11.37)$$

onde a função complexa  $R(\omega)$  é denominada **resposta de frequência**:

$$\boxed{R(\omega) = \tilde{H}(i\omega)} \quad (11.38)$$

Assim, se a tensão de entrada for a tensão alternada  $V_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi)$ , a tensão de saída será:

$$V = V_{\text{máx}} |R(\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(R(\omega))) \quad (11.39)$$

onde  $|R(\omega)|$  e  $\arg(R(\omega))$  são o módulo e o argumento da função complexa  $R(\omega)$ .

Por exemplo, no caso do filtro passa-alto, no capítulo anterior mostramos que a função de transferência é (equação 10.39):

$$\tilde{H}(s) = \frac{t_C s}{t_C s + 1} \quad (11.40)$$

E, portanto, a função de resposta de frequência é:

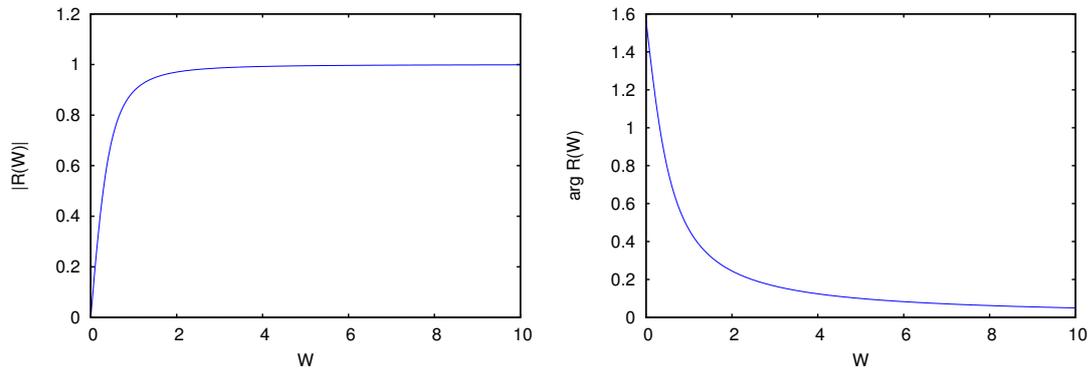
$$R(\omega) = \frac{i t_C \omega}{1 + i t_C \omega} \quad (11.41)$$

O módulo e o argumento são:

$$|R(\omega)| = \frac{t_C \omega}{\sqrt{1 + (t_C \omega)^2}} \quad \arg(R(\omega)) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t_C \omega) \quad (11.42)$$

A figura 11.11 mostra a função resposta de frequência para um filtro passa-alto com frequência angular de corte  $(1/t_C)$  igual a 0.5. Repare que quando  $\omega_c = 1/t_C$ ,  $R$  tem módulo  $1/\sqrt{2} = 0.707$  e argumento igual a  $\pi/4$ .

Vários filtros podem ser combinados, em forma sequencial, e a função de resposta será o produto das funções de todos os filtros na sequência. Por exemplo, o circuito na figura 11.12 é a combinação de um filtro passa-alto, com frequência angular de corte  $\omega_1 = 1/(R_1 C_1)$  e um filtro passa-baixo, com frequência angular de corte  $1/(R_2 C_2)$ .



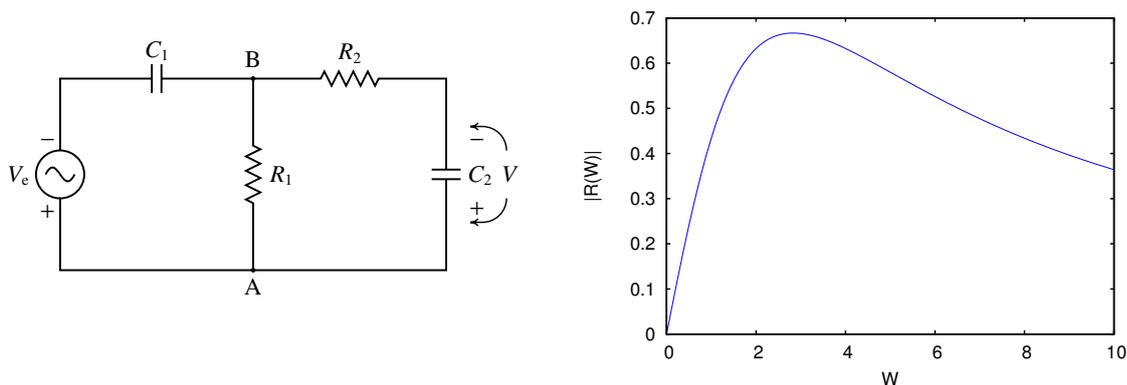
**Figura 11.11.:** Módulo e argumento da função resposta de frequência de um filtro passa-alto com frequência angular de corte  $\omega_c = 0.5$ .

A tensão entre os pontos A e B é a saída do filtro passa-alto, que constitui a tensão de entrada do filtro passa-baixo. Por tanto, multiplicando as funções resposta do filtro passa-alto (equação 11.41) e do filtro passa-baixo (problema 7 do capítulo anterior) obtemos:

$$R(\omega) = \frac{it_{C_1} \omega}{(1 + it_{C_1} \omega)(1 + it_{C_2} \omega)} \quad (11.43)$$

onde as constantes de tempo são  $t_{C_1} = R_1 C_1$  e  $t_{C_2} = R_2 C_2$

O filtro passa-alto atenuará as frequências angulares menores que  $\omega_1 = 1/t_{C_1}$  e o filtro passa-baixo atenua as frequências angulares maiores que  $\omega_2 = 1/t_{C_2}$ . Se usarmos condensadores e resistências com valores que verifiquem  $\omega_1 < \omega_2$ , o filtro atenuará as frequências fora da banda compreendida entre  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , deixando passar as frequências angulares na banda  $[\omega_1, \omega_2]$ . Esse tipo de filtro é designado **passa-banda**. A figura 11.12 mostra o módulo da função resposta de frequência para o caso  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 4$ .



**Figura 11.12.:** Filtro passa-banda e módulo da sua função de resposta de frequência com frequências de corte de 2 e 4.

Um filtro ideal deveria ter uma função de resposta nula, para as frequências que se pretende eliminar, e 1 nas outras frequências. Com circuitos mais complicados consegue-se obter filtros mais próximos do comportamento ideal. Outro fator a ter em conta é a resposta

transitória, que temos ignorado por ser nula após algum tempo; num filtro de boa qualidade, esses sinais transitórios deveriam ter um tempo de decaimento muito curto.

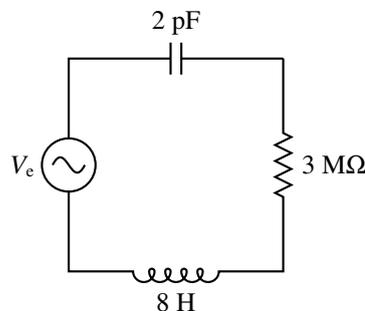
## 11.8. Ressonância

A reatância equivalente num circuito varia com a frequência. Se o circuito inclui condensadores e indutores, a reatância será uma função da frequência. Quando a reatância for elevada, o módulo da impedância será elevado e o fator de potência baixo. Isso implica corrente máxima e potência média muito baixas. Nas frequências em que a reatância for menor, o módulo da impedância será menor e a potência dissipada maior.

Em alguns casos (indutores em série com condensadores) poderá existir uma frequência intermédia, para a qual a reatância equivalente é nula. Nesse caso o módulo da impedância será mínimo, o fator de potência será máximo ( $\cos \varphi = 1$ ) e as fases da tensão e da corrente serão iguais (fasores na mesma direção e sentido). Quando isso acontece, diz-se que a tensão de entrada está em **ressonância** com o circuito. A frequência para a qual a reatância é nula é um valor característico do circuito, designado de **frequência de ressonância**.

### Exemplo 11.3

Calcule a frequência de ressonância do circuito e a potência média máxima que pode fornecer uma fonte com tensão máxima  $V_{m\acute{a}x}$ .



**Resolução.** Com a resistência em  $M\Omega$  e a capacidade em pF, convém usar  $\mu s$  para a unidade de tempo e, portanto, MHz para a frequência e H para a indutância.

A impedância total do circuito será a soma das 3 impedâncias:

$$Z = 3 + i8\omega - \frac{i}{2\omega} = 3 + i\left(8\omega - \frac{1}{2\omega}\right)$$

$$8\omega - \frac{1}{2\omega} = 0 \quad \implies \quad \omega = \frac{1}{4} \quad \implies \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.0398$$

No sistema de unidades que estamos a usar, a frequência de ressonância é  $f = 0.0398$  MHz = 39.8 kHz.

Se a fonte tivesse essa frequência, teríamos  $Z = 3 M\Omega$ , corrente máxima  $I_{m\acute{a}x} = V_{m\acute{a}x}/3 \mu A$  e potência média máxima  $\bar{P} = V_{m\acute{a}x} I_{m\acute{a}x}/2 = V_{m\acute{a}x}^2/6$  ( $\mu W$ , se  $V_{m\acute{a}x}$  estiver em volts).

No circuito do exemplo anterior, a tensão de entrada carrega e descarrega o condensador. Inicialmente, a carga no condensador oscila com a frequência de oscilação da tensão na fonte; mas quando a carga no condensador for elevada, a diferença de potencial do condensador poderá contrariar a tensão da fonte, impedindo a entrada de mais carga.

A situação é semelhante a uma massa pendurada de uma mola elástica, na qual atua outra força externa que tenta manter a massa oscilando para cima e para baixo. Se a força externa não oscilar com a mesma frequência própria de oscilação da mola elástica, haveria momentos em que a força externa está a tentar fazer subir a massa, enquanto a mola elástica empurra em sentido oposto.

No caso do circuito, se a fonte não existisse mas o condensador tivesse uma carga inicial, começaria a descarregar, produzindo uma corrente. No momento em que o condensador descarrega completamente, o indutor faz com que a corrente persista por alguns instantes, recarregando o condensador com cargas de sinais opostos à carga inicial. O ciclo repete-se, com uma frequência própria do circuito. No entanto, a resistência faz com que em cada ciclo a carga do condensador seja menor, até acabar por desaparecer (equilíbrio estável). Existe ressonância quando a fonte oscilar com a mesma frequência própria do circuito.

Se quando a frequência da fonte fosse a frequência de ressonância a resistência fosse nula,  $Z$  seria nula, e aparentemente  $I_{\text{máx}} = V_{\text{máx}}/Z$  seria infinita. No entanto, a corrente não aumenta instantaneamente até esse valor, mas aumenta gradualmente com as oscilações da carga no condensador. Quando essa carga máxima se tornar muito elevada, ocorrerá a ruptura do dielétrico no condensador ou a corrente elevada acabará por queimar o indutor.

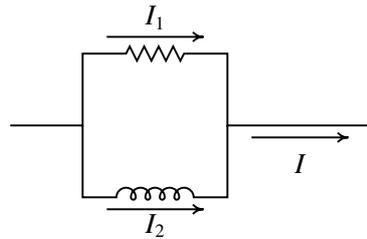
## Perguntas

1. No circuito representado no diagrama,

$$I_1(t) = \cos(\omega t + 2\pi/3)$$

$$I_2(t) = \sqrt{3} \cos(\omega t + \pi/6)$$

Calcule  $I(t)$ .

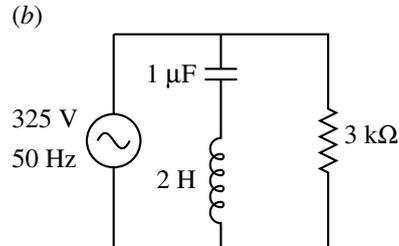
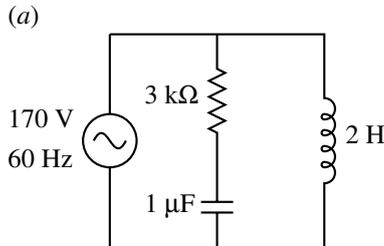


- A.  $3 \cos(\omega t - \pi/2)$   
 B.  $2 \cos(\omega t - \pi/3)$   
 C.  $3 \cos(\omega t + \pi/2)$   
 D.  $\sqrt{3} \cos(\omega t + \pi/2)$   
 E.  $2 \cos(\omega t + \pi/3)$
2. Um condensador de  $2.73 \mu\text{F}$  e uma resistência de  $1166 \Omega$  estão ligados em série a uma fonte de tensão alternada com frequência de  $50 \text{ Hz}$  e tensão máxima de  $325 \text{ V}$ . Calcule a corrente eficaz na resistência.
- A.  $247 \text{ mA}$                       D.  $212 \text{ mA}$   
 B.  $150 \text{ mA}$                       E.  $170 \text{ mA}$   
 C.  $99 \text{ mA}$
3. Um condensador de  $2.73 \mu\text{F}$  e uma resistência de  $1166 \Omega$  estão ligados em série a uma fonte de tensão alternada de  $50 \text{ Hz}$ . Podemos concluir que a tensão da fonte estará:
- A. Adiantada  $90^\circ$  em relação à corrente.  
 B. Adiantada  $45^\circ$  em relação à corrente.  
 C. Atrasada  $90^\circ$  em relação à corrente.  
 D. Atrasada  $45^\circ$  em relação à corrente.  
 E. Em fase com a corrente.
4. Qual das afirmações seguintes é verdadeira, em relação a uma bobina de  $2 \text{ mH}$  e um condensador de  $5 \text{ pF}$ ?
- A. A reatância da bobina é menor.  
 B. A reatância do condensador é menor.  
 C. Se a corrente for contínua, a reatância da bobina é menor.  
 D. Se a corrente for contínua, a reatância do condensador é menor.  
 E. Se a corrente for contínua, a reatância dos dois dispositivos é nula.
5. Num circuito  $RLC$  de corrente alternada, em série, quando a reatância equivalente for nula, qual das seguintes afirmações é verdadeira:
- A. A impedância é nula.  
 B. O fator de potência é nulo.  
 C. O ângulo de defasamento é nulo.  
 D. A corrente é nula.  
 E. A tensão é nula.

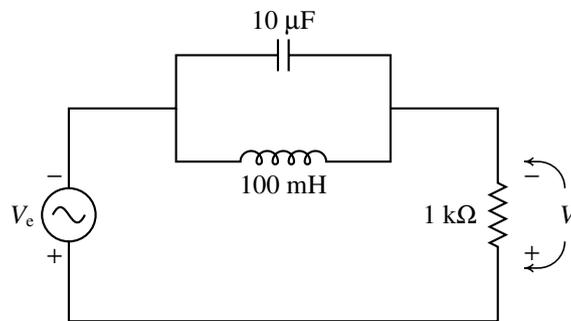
## Problemas

1. A resistência de uma bobina é  $150 \Omega$  e a sua indutância é  $1.4 \text{ H}$ . A bobina é ligada à rede elétrica com tensão máxima  $325 \text{ V}$  e frequência de  $50 \text{ Hz}$ . Encontre a expressão para a corrente na bobina em função do tempo  $t$ .
2. Uma bobina, com indutância de  $36 \text{ mH}$  e resistência de  $40 \Omega$ , liga-se em paralelo com um condensador de  $32 \text{ nF}$  e com uma fonte de tensão alternada  $V(t) = 345 \cos(150\pi t)$  (em volts, e o tempo  $t$  em segundos). Calcule: (a) A corrente máxima na bobina. (b) A corrente eficaz no condensador. (c) A potência média dissipada na bobina.

3. Demonstre que a transformada inversa da equação 11.3 conduz à corrente alternada 11.5
4. No problema 9 do capítulo 9, calcule a frequência do circuito e os valores máximos da corrente e da carga.
5. Nos dois circuitos representados na figura, calcule a corrente e a tensão em todos os elementos do circuito.

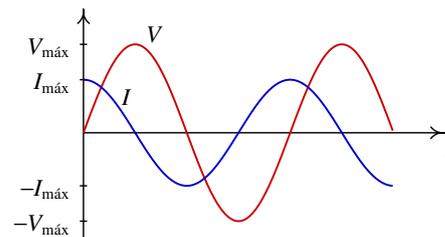


6. A figura mostra um filtro **rejeita-banda** que atenua as frequências angulares próximas de 1 kHz. (a) Calcule a função de resposta  $R(\omega)$  do circuito. (b) Mostre que para  $\omega = 1$  kHz,  $R(\omega)$  é igual a zero. (c) Calcule o módulo de  $R(\omega)$  e desenhe o seu gráfico para  $\omega$  entre 0 e 2 kHz.

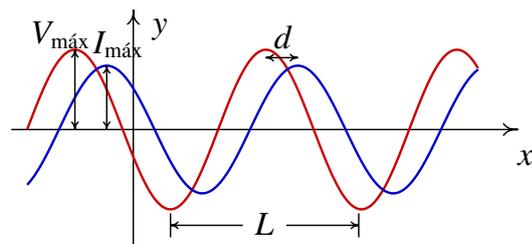


7. Num segmento de um circuito de corrente alternada a tensão é  $24 \cos(\pi t/10 + 1.5)$  (em volt, se  $t$  estiver em milissegundos) e a corrente é  $8 \cos(\pi t/10 + 2.0)$  ( $\mu\text{A}$ , com  $t$  em ms). (a) Calcule a resistência e reatância desse segmento. (b) O segmento do circuito avariou e pretende substituí-lo com resistências, condensadores ou indutores, mas o seu orçamento só lhe permite comprar dois dispositivos. Quais dispositivos devia comprar, com que valores, e como deviam ser ligados no circuito?

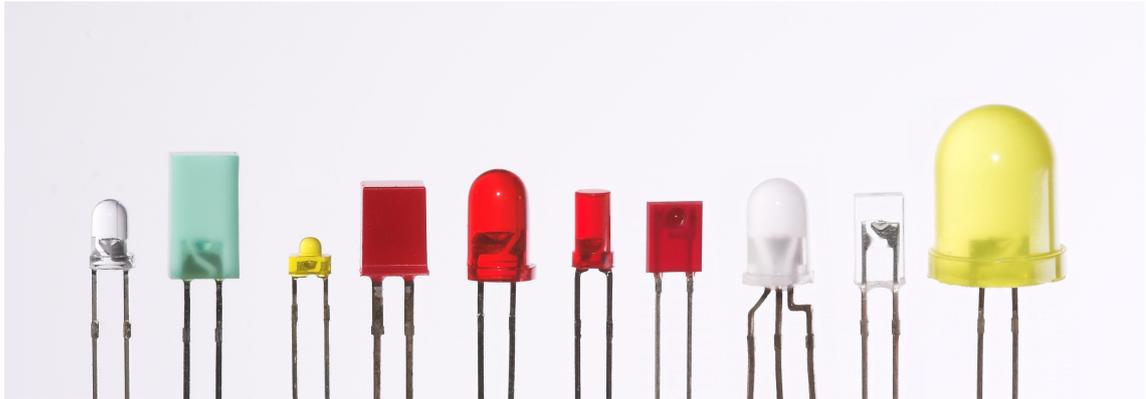
8. A figura mostra a tensão e a corrente num condensador. A corrente é produzida pela tensão: se não houvesse tensão elétrica, não existia corrente. Como se explica então que no instante  $t = 0$  a corrente seja diferente de zero se a tensão é nula?



9. A figura mostra o ecrã de um osciloscópio onde aparecem a tensão e a corrente num elemento de um circuito. As distâncias  $L$  e  $d$  foram medidas diretamente no ecrã, obtendo-se os valores  $L = 6$  cm,  $d = 1$  cm. O osciloscópio também permite determinar que a tensão máxima é  $V_{\text{máx}} = 36$  V e a corrente máxima é  $I_{\text{máx}} = 12$  mA. Com esses dados, calcule a parte real e a parte imaginária da impedância do elemento do circuito.



## 12. Ondas eletromagnéticas e luz



Os díodos emissores de luz (LED) são muito usados atualmente em aparelhos eletrônicos. Um LED produz luz de forma muito eficiente, com um consumo elétrico de apenas uns poucos miliwatt. São construídos em diferentes formas, tamanhos e cores. Cada algarismo num écran numérico é obtido com um conjunto de 8 LED; para obter cada um dos números acendem-se as combinações de LED necessárias.

Um LED é construído com cristais semicondutores e tem um tempo de duração muito elevado. A luz que produz tem uma cor própria que não muda com a corrente ou as condições de operação.

## 12.1. Equações de Maxwell

As equações básicas que permitem calcular o campo eletromagnético são conhecidas como equações de Maxwell. Uma forma suficiente de definir os dois campos, em qualquer ponto do espaço, consiste em descrever o fluxo dos campos em qualquer superfície fechada, e o integral de linha em qualquer curva fechada. Assim, precisamos de quatro equações, duas que digam como é o fluxo dos campos elétrico,  $\Phi_e$ , e magnético,  $\Phi_m$ , em superfícies fechadas, e duas equações para os integrais de linha dos dois campos.

Essas quatro equações já foram estudadas nos capítulos anteriores e vamos rescrevê-las aqui. A primeira equação é a lei de Gauss, que relaciona o fluxo do campo elétrico numa superfície fechada com as cargas no seu interior:

$$\Phi_e(\text{Sup. fechada}) = 4\pi k q_{\text{int}} \quad (12.1)$$

No caso do campo magnético, como não existem monopólos magnéticos, o fluxo através de qualquer superfície fechada é nulo.

$$\Phi_m(\text{Sup. fechada}) = 0 \quad (12.2)$$

Essa é a segunda equação de Maxwell.

A terceira equação de Maxwell é a equação que define o integral de linha do campo elétrico em qualquer curva fechada  $C$ . Essa equação é a lei de Faraday, estudada no capítulo sobre indução eletromagnética:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (12.3)$$

o integral no lado esquerdo corresponde à *fem* induzida no percurso  $C$ . O fluxo magnético no lado direito da equação é o fluxo através da superfície delimitada pela curva  $C$ .

A quarta equação, que define o integral de linha do campo magnético em qualquer curva fechada  $C$ , é a lei de Ampère, já estudada no capítulo sobre o campo magnético:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_{\text{int}} \quad (12.4)$$

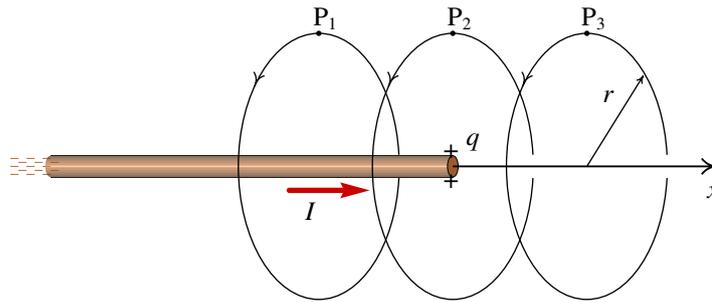
mas Maxwell reparou que esta equação só poderia ser válida no caso em que não existam campos elétricos variáveis.

Vimos no capítulo sobre indução eletromagnética que os campos elétrico e magnético são diferentes em diferentes referenciais inerciais, e usamos a invariância da força eletromagnética para calcular o campo elétrico induzido num referencial em que o campo magnético não é estático. De forma semelhante, num referencial em que o campo elétrico não seja estático, deverá aparecer um campo magnético induzido.

Na equação 12.4 falta um termo que dependa da variação do campo elétrico e que corresponda ao integral de linha do campo magnético induzido.

Consideremos um exemplo: um fio retilíneo sobre o semieixo negativo dos  $x$ , que vem desde  $-\infty$  e termina na origem (figura 12.1). Se durante alguns instantes existe no fio uma corrente  $I$ , no sentido positivo do eixo dos  $x$ , existirá uma acumulação de cargas positivas na origem; se  $q = f(t)$  representa a carga acumulada na origem no instante  $t$ , a derivada dessa função é igual à corrente:

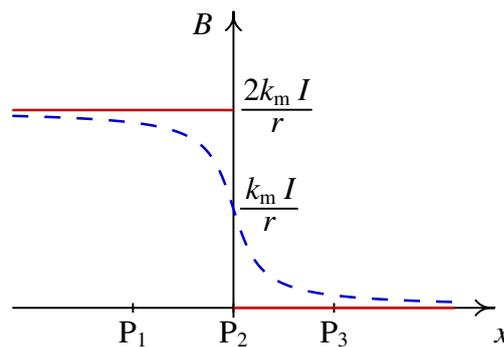
$$I = \frac{dq}{dt} \quad (12.5)$$



**Figura 12.1.:** Fio retilíneo, no eixo dos  $x$ , desde  $-\infty$  até a origem.

Para calcular o módulo do campo magnético em três pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , que se encontram a uma distância  $r$  do eixo dos  $x$ , consideramos 3 circunferências de raio  $r$ , perpendiculares ao eixo dos  $x$  e com centro no eixo. Aplicando a lei de Ampère nessas 3 circunferências, obtém-se que o módulo do campo magnético no ponto  $P_1$  é  $2k_m I/r$  e nos pontos  $P_2$  e  $P_3$  é nulo.

A linha contínua no gráfico 12.2 mostra o módulo do campo magnético obtido usando a lei de Ampère para todos os pontos a uma distância  $r$  do eixo dos  $x$ . Em  $P_2$  ( $x = 0$ ) existe uma descontinuidade; o campo passa de  $2k_m I/r$  para zero. A curva a tracejado mostra o resultado mais realista esperado: o campo decresce gradualmente até zero.



**Figura 12.2.:** Módulo do campo magnético do sistema na figura 12.1, em vários pontos a uma distância  $r$  do eixo dos  $x$ .

Para obter a curva em tracejado na figura 12.2 será preciso incluir no lado direito da equação 12.4 um termo adicional que se aproxime de  $-2\pi k_m I$  quando  $x$  for negativo perto da origem, e que se aproxime de  $2\pi k_m I$  quando  $x$  for positivo e perto da origem.

A carga  $q$  na origem produz um fluxo elétrico  $\Phi_e$  negativo no círculo que passa por  $P_1$  e positivo no círculo que passa por  $P_3$ . No ponto  $P_2$  o fluxo elétrico muda de  $-2\pi kq$  para  $2\pi kq$ . Consequentemente, a derivada do fluxo em função do tempo passa de  $-2\pi kI$  para  $2\pi kI$ , e o termo que falta no lado direito da equação 12.4 é:

$$\frac{k_m}{k} \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (12.6)$$

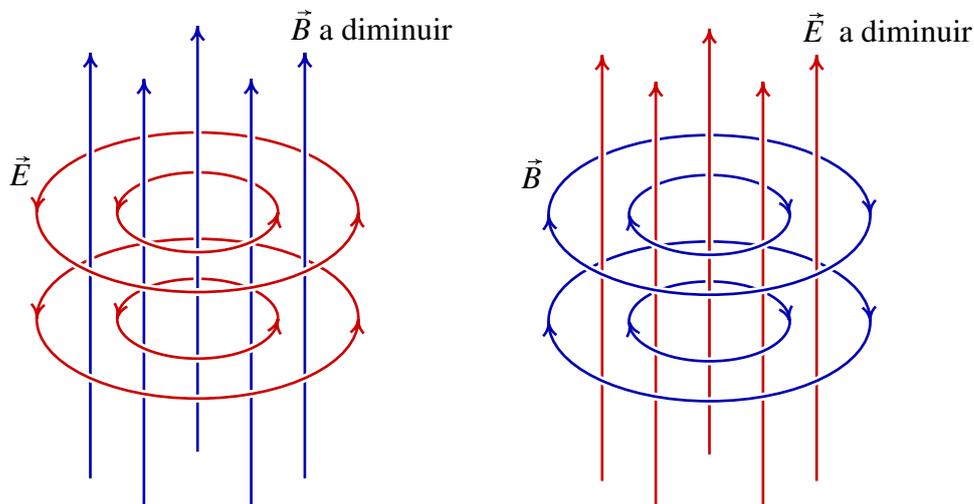
Incluindo esse termo na equação 12.4, obtém-se a quarta equação de Maxwell:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_{\text{int}} + \frac{k_m}{k} \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (12.7)$$

## 12.2. Campos induzidos

Um campo magnético variável no tempo induz um campo elétrico, e um campo elétrico variável induz um campo magnético. Um exemplo é o campo magnético uniforme do problema 6 no capítulo 9; a variação do campo em função do tempo induz um campo elétrico com linhas de campo circulares.

O campo elétrico induzido é proporcional à derivada do fluxo magnético, e o campo magnético induzido é proporcional à derivada do fluxo elétrico. Quando um campo é uniforme, o fluxo através de uma superfície é maior se a superfície for perpendicular ao campo; isso implica que o campo induzido é perpendicular ao campo variável.



**Figura 12.3.:** Campo elétrico induzido por um campo magnético uniforme mas variável (esquerda) e campo magnético induzido por um campo elétrico uniforme mas variável (direita).

A figura 12.3 mostra o campo elétrico induzido por um campo magnético uniforme mas variável, e o campo magnético induzido por um campo elétrico uniforme e variável. No

primeiro caso, devido ao sinal negativo no lado direito da equação 12.3, o campo elétrico induzido é no sentido oposto ao obtido com a regra da mão direita em relação à derivada do campo magnético; como o campo magnético está a diminuir, a derivada do campo aponta para baixo e a regra da mão direita indica rotação no sentido horário; portanto, as linhas do campo induzido estão orientadas no sentido antihorário.

O sinal positivo do último termo na equação 12.7 implica que as linhas do campo magnético induzido seguem a regra da mão direita em relação ao aumento do campo elétrico. No caso do campo elétrico variável no lado direito da figura 12.3, como o campo está a diminuir, a derivada do campo elétrico aponta para baixo, e a regra da mão direita indica que o campo magnético induzido é no sentido horário.

## 12.3. Campo eletromagnético no vazio

No vazio, onde não existem cargas nem correntes, podem ainda existir campos elétrico e magnético. Nesse caso, as quatro equações de Maxwell são:

$$\Phi_e(\text{Sup. fechada}) = 0 \quad (12.8)$$

$$\Phi_m(\text{Sup. fechada}) = 0 \quad (12.9)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (12.10)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{k_m}{k} \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (12.11)$$

O único parâmetro nessas equações é a constante  $k_m/k$ . No sistema internacional de unidades, o valor dessa constante é:

$$\frac{k_m}{k} = \frac{10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}}{9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}} = \frac{1}{9 \times 10^{16}} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \quad (12.12)$$

que é exatamente igual ao inverso do quadrado da velocidade da luz  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

$$\boxed{\frac{k_m}{k} = \frac{1}{c^2}} \quad (12.13)$$

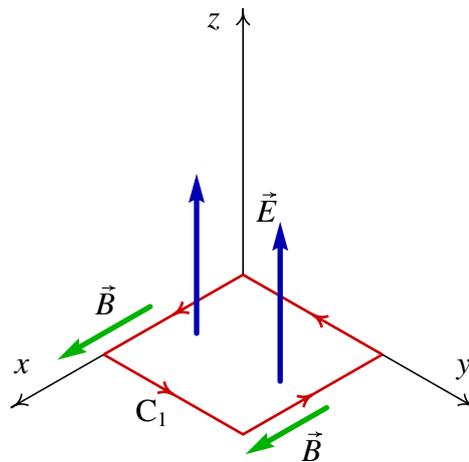
Na época de Maxwell, meados do século XIX, a velocidade da luz já tinha sido medida com precisão dando exatamente o mesmo valor que acabamos de calcular a partir da constante de Coulomb e da constante magnética. Assim, Maxwell concluiu que a luz deveria ser uma onda eletromagnética, composta por campos elétrico e magnético que se propagam no espaço.

Para investigar as soluções das equações 12.8, 12.9, 12.10 e 12.11, vamos admitir que numa região existem campos elétrico e magnético que são soluções dessas equações; cada

um dos campos é induzido pela variação do outro. Se os campos forem uniformes nessa região, vimos que deveriam ser perpendiculares entre si. Podemos escolher o eixo dos  $x$  a apontar na direção e sentido do campo  $\vec{B}$ , o eixo dos  $z$  na direção e sentido do campo  $\vec{E}$  e a origem num ponto na região onde os campos existem.

Aplicamos a equação 12.11 num pequeno retângulo  $C_1$  perpendicular ao eixo dos  $z$ , com arestas  $\Delta x$  e  $\Delta y$  e um vértice na origem, como na figura 12.4. O fluxo elétrico através de  $C_1$  é:

$$\Phi_e = E \Delta x \Delta y \quad (12.14)$$



**Figura 12.4.:** Fluxo elétrico e integral de linha do campo magnético num retângulo no plano  $xy$ .

como o campo magnético é no sentido do eixo dos  $x$ , o integral de linha do campo magnético no percurso  $C_1$  é igual a:

$$\int_{C_1} B_t ds = B(y) \Delta x - B(y + \Delta y) \Delta x \quad (12.15)$$

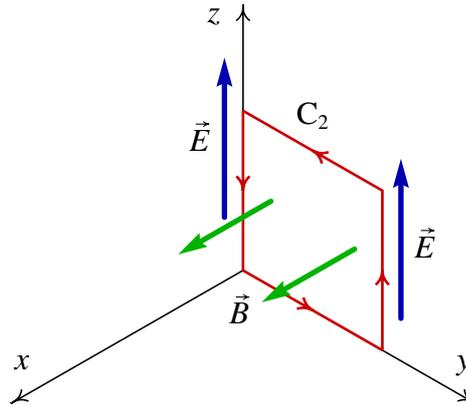
substituindo 12.14 e 12.15 na equação 12.11, obtemos:

$$B(y) \Delta x - B(y + \Delta y) \Delta x = \frac{1}{c^2} \Delta x \Delta y \frac{\partial E}{\partial t} \quad (12.16)$$

dividindo os dois lados por  $\Delta x \Delta y$  e calculando o limite  $\Delta y \rightarrow 0$ , o lado esquerdo fica igual a menos a derivada parcial de  $B$  em função de  $y$ :

$$-\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (12.17)$$

A seguir, apliquemos a equação 12.10 num pequeno retângulo  $C_2$  perpendicular ao eixo dos  $x$ , com arestas  $\Delta y$  e  $\Delta z$  e um vértice na origem (figura ).



**Figura 12.5.:** Fluxo magnético e integral de linha do campo elétrico num retângulo no plano  $yz$ .

O fluxo magnético em  $C_2$  é  $B\Delta y\Delta z$ , e o integral de linha do campo elétrico é  $E(y + \Delta y)\Delta z - E(y)\Delta z$ . Substituindo na equação 12.9 temos:

$$E(y + \Delta y)\Delta z - E(y)\Delta z = -\Delta y\Delta z \frac{\partial B}{\partial t} \quad (12.18)$$

dividindo os dois lados por  $\Delta y\Delta z$  e calculando o limite  $\Delta y \rightarrow 0$ , o lado esquerdo fica igual à derivada parcial de  $E$  em função de  $y$ :

$$\frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (12.19)$$

Derivando a equação 12.17 em ordem a  $t$  e a equação 12.19 em ordem a  $y$ , e combinando as duas equações, podemos obter uma equação em que aparece unicamente o campo elétrico:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}} \quad (12.20)$$

Também podemos obter uma equação apenas para o campo magnético, se derivarmos a equação 12.17 em ordem a  $y$  e a equação 12.19 em ordem a  $t$ , e combinarmos os resultados:

$$\boxed{\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}} \quad (12.21)$$

As equações 12.20 e 12.21 são a mesma equação, designada de **equação de onda**.

## 12.4. Ondas planas polarizadas

As possíveis soluções da equação 12.20 ou 12.21 podem ser obtidas usando um sistema de coordenadas diferentes em que a equação toma uma forma mais simples. O campo  $E$  na

equação 12.20 é uma função que depende de  $y$  e de  $t$ . Fazemos uma mudança para duas **variáveis características**  $r$  e  $s$  definidas assim:

$$r = y + ct \quad s = y - ct \quad (12.22)$$

usando a regra da cadeia, podemos calcular as derivadas de  $E$  que aparecem na equação 12.20, em função de  $r$  e  $s$ , e substituindo nessa equação obtemos:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r \partial s} = 0 \quad (12.23)$$

É fácil ver que para verificar essa equação, uma das duas derivadas parciais de  $E$ , em ordem a  $r$  ou em ordem a  $s$ , deverá ser nula. Isto é, o campo  $E$  deverá ser uma função  $f(r)$  que depende apenas de  $r$ , ou uma função  $g(s)$  que depende apenas de  $s$ . Em função das variáveis  $y$  e  $t$ , temos que  $E$  pode ter uma das duas formas seguintes:

$$E = f(y + ct) \quad E = g(y - ct) \quad (12.24)$$

ou qualquer combinação linear das duas soluções acima. Quaisquer funções  $f$  ou  $g$  conduzem a soluções da equação de onda.

Para diferentes valores de  $t$ ,  $f(y + ct)$  tem a mesma forma em função de  $y$ , mas em relação a  $f(y)$ , em  $t = 0$ , encontra-se deslocada para o lado negativo de  $y$  uma distância igual a  $ct$ . Assim, o campo  $E = f(y + ct)$  corresponde a uma onda que se propaga no sentido negativo do eixo dos  $y$ . Uma análise semelhante mostra que  $E = g(y - ct)$  corresponde a uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo dos  $y$ .

O campo magnético  $B$ , que também verifica a equação de onda, também devesse ter uma forma semelhante à equação 12.24, mas não pode ser independente da solução obtida para  $E$ , devido às relações 12.17 e 12.19. Substituindo as soluções 12.24 na equação 12.17, obtemos as respectivas soluções para o campo magnético:

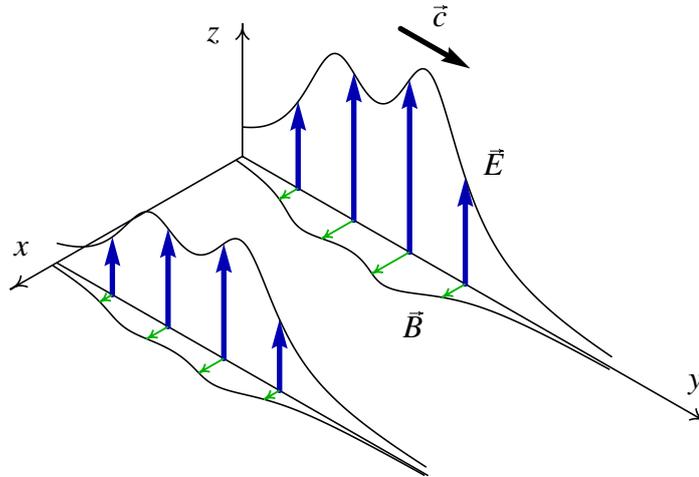
$$B = -\frac{1}{c} f(y + ct) \quad B = \frac{1}{c} g(y - ct) \quad (12.25)$$

O fator  $c$  no denominador indica que o módulo do campo magnético numa onda eletromagnética é muito menor que o módulo do campo elétrico. O sinal negativo na primeira expressão acima, indica que se a onda se deslocar no sentido negativo do eixo dos  $y$ , o campo magnético terá o sentido oposto ao que foi indicado nas figuras 12.4 e 12.5.

Resumindo, obtivemos duas famílias de soluções. A primeira consiste em ondas eletromagnéticas que se propagam no sentido positivo do eixo dos  $y$  com campos elétrico e magnético dados pelas seguintes expressões:

$$\vec{E} = g(y - ct) \vec{e}_z \quad (12.26)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} g(y - ct) \vec{e}_x \quad (12.27)$$



**Figura 12.6.:** Onda eletromagnética plana polarizada, com velocidade no sentido positivo do eixo dos  $y$ .

em que  $g$  pode ser qualquer função de uma variável,  $g(s)$ . A figura 12.6 mostra uma dessas soluções.

A segunda família de soluções são ondas eletromagnéticas que se propagam no sentido negativo do eixo dos  $y$ , e com campos que verificam as expressões:

$$\vec{E} = f(y + ct) \vec{e}_z \quad (12.28)$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} f(y + ct) \vec{e}_x \quad (12.29)$$

onde  $f$  é qualquer função de uma variável,  $f(r)$ .

O tipo de ondas eletromagnéticas que temos estudado nas duas últimas seções são designadas de **onda plana polarizada**; são caracterizadas por uma direção constante para os campos elétrico e magnético. É importante lembrar que essas direções dos dois campos têm de ser perpendiculares. A direção de propagação é perpendicular às direções dos dois campos, e será sempre no sentido do produto  $(\vec{E} \times \vec{B})$ ; nomeadamente, seguindo a regra da mão direita desde  $\vec{E}$  até  $\vec{B}$ .

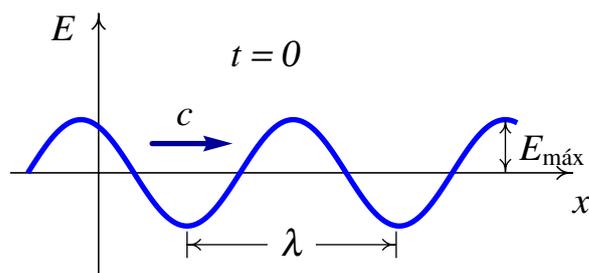
A direção de polarização é, por definição, a direção do campo elétrico. O campo magnético da onda é muito mais fraco do que o campo elétrico. O módulo da velocidade de todas as ondas eletromagnéticas no vácuo é sempre igual a  $c$ .

As ondas planas polarizadas que se propagam na direção do eixo dos  $x$  ou dos  $z$ , terão formas semelhantes às equações 12.26 e 12.27, ou 12.28 e 12.29, substituindo  $y$  pela variável correspondente à direção de propagação, e substituindo os versores  $\vec{e}_x$  e  $\vec{e}_z$  por dois versores perpendiculares entre si e perpendiculares à direção de propagação.

## 12.5. Ondas harmónicas

Uma onda harmónica é uma onda com a forma de uma função sinusoidal, como na figura 12.7, no caso de uma onda que se desloca no sentido positivo do eixo dos  $x$ .

A distância  $\lambda$  entre dois pontos consecutivos onde o campo e a sua derivada têm o mesmo valor, é designada por **comprimento de onda** (por exemplo, a distância entre dois máximos ou mínimos consecutivos). O valor máximo do módulo do campo,  $E_0$ , é a sua **amplitude**.



**Figura 12.7.:** Onda harmónica.

O tempo que a onda demora a percorrer um comprimento de onda designa-se por **período**,  $T$ . O inverso do período é a frequência  $f = 1/T$ , que indica o número de comprimentos de onda que passam por um ponto, por unidade de tempo. No sistema SI a unidade da frequência é o hertz, representado pelo símbolo Hz, equivalente a  $s^{-1}$ .

No caso de uma onda eletromagnética no vácuo, a velocidade de propagação é  $c$  que deverá verificar a relação:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (12.30)$$

A equação da função representada na figura 12.7 é:

$$E(x) = E_{\text{máx}} \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi\right) \quad (12.31)$$

onde a constante  $\varphi$  é a **fase inicial**. Essa função representa a forma da onda num instante inicial, que podemos admitir  $t = 0$ . Para obter a função de onda num instante diferente, teremos que substituir  $x$  por  $x - ct$ , já que a onda se propaga no sentido positivo do eixo dos  $x$ , com velocidade  $c$

$$E(x, t) = E_{\text{máx}} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) + \varphi\right] \quad (12.32)$$

usando a relação entre a velocidade e o período, podemos escrever

$$E(x, t) = E_{\text{máx}} \sin\left(2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \varphi\right) \quad (12.33)$$

Se substituirmos  $x = 0$ , obteremos a equação que descreve o campo elétrico na origem, em função do tempo:

$$E(x) = -E_{\text{máx}} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right) \quad (12.34)$$

assim, o campo na origem é uma função sinusoidal com período  $T$  e amplitude  $E_{\text{máx}}$ . O campo em outros pontos tem exatamente a mesma forma sinusoidal, mas com diferentes valores da fase.

---

### Exemplo 12.1

Uma onda eletromagnética plana propaga-se no sentido negativo do eixo dos  $z$ . Num dado instante  $t = 0$  o campo elétrico é  $\vec{E} = 34 \sin(3,25 \times 10^8 z) \vec{e}_x$ , onde  $z$  é medida em metros, e o campo é medido em N/C. Escreva a função que define o campo de indução magnética em qualquer ponto e em qualquer instante de tempo.

**Resolução.** A função que define o campo elétrico em  $t = 0$  indica que se trata de uma onda harmónica polarizada na direcção do versor  $\vec{e}_x$ . O campo elétrico de uma onda harmónica plana, polarizada segundo  $\vec{e}_x$ , que se propaga no sentido negativo do eixo  $z$ , é:

$$\vec{E} = E_{\text{máx}} \sin\left(2\pi \left(\frac{z}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) + \varphi\right) \vec{e}_x \quad (12.35)$$

substituindo  $t = 0$  e comparando com o campo dado no enunciado, concluímos que:

$$\varphi = 0 \quad \frac{2\pi}{\lambda} = 3,25 \times 10^8 \quad E_{\text{máx}} = 34 \quad (12.36)$$

$\lambda/T$  deve ser igual à velocidade da luz (admitimos que a onda se propaga no vácuo) que em unidades SI é  $3 \times 10^8$ . Assim,  $2\pi/T = 9,75 \times 10^{16}$  e o campo elétrico em qualquer ponto e em qualquer instante de tempo é:

$$\vec{E} = 34 \sin(3,25 \times 10^8 z + 9,75 \times 10^{16} t) \vec{e}_x \quad (12.37)$$

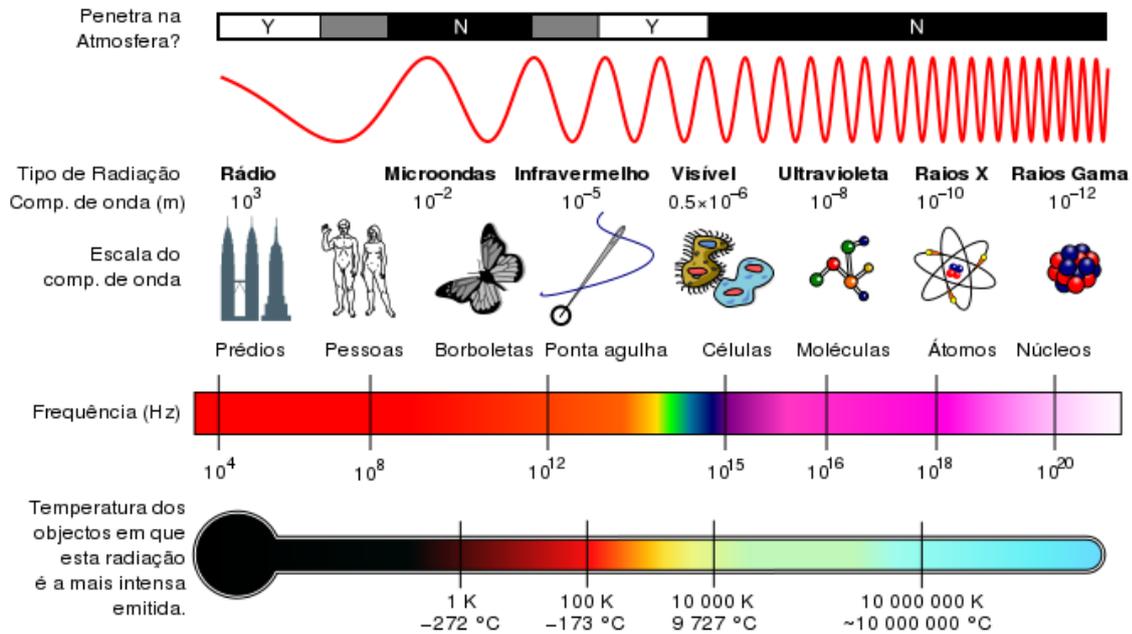
o módulo do campo  $\vec{B}$  é igual ao módulo do campo elétrico, dividido pela velocidade da luz. O sentido de  $\vec{B}$  deve garantir que o produto vetorial  $\vec{E} \times \vec{B}$  seja na direcção de propagação ( $-\vec{e}_z$ ); assim:

$$\vec{B} = -1,13 \times 10^{-7} \sin(3,25 \times 10^8 z + 9,75 \times 10^{16} t) \vec{e}_y \quad (12.38)$$


---

## 12.6. Espectro eletromagnético

Numa onda harmónica o comprimento de onda,  $\lambda$ , e a frequência,  $f$ , não podem variar independentemente, mas estão relacionadas por  $\lambda f = c$ . Dada a frequência ou o comprimento de onda, é possível classificar a onda dentro do **espectro eletromagnético** e determinar



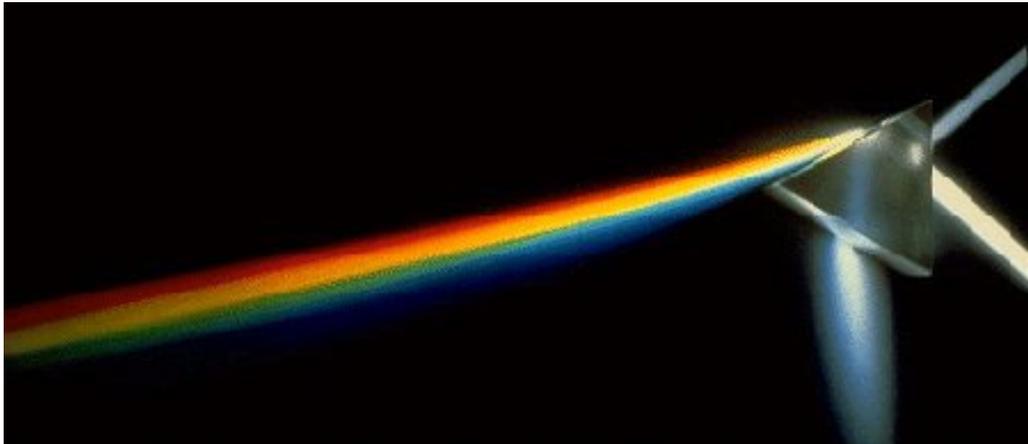
**Figura 12.8.:** Espectro eletromagnético.

as suas propriedades. O valor máximo dos campos determina a intensidade mas não a classificação no espectro.

Em princípio, podem existir ondas eletromagnéticas com qualquer valor de  $\lambda$  entre 0 e  $\infty$ . Alguns exemplos de ondas eletromagnéticas são as ondas de rádio e de comunicações móveis, as ondas usadas num forno de microondas para aquecer os alimentos, e a própria luz. O que distingue uma dessas ondas da outra é a sua frequência, ou de forma equivalente, o seu comprimento de onda. A Figura 12.8 mostra o espectro eletromagnético identificando algumas das ondas comuns.

Usualmente, a radiação eletromagnética produzida por um sistema não tem uma frequência única  $f$ , como no caso das ondas harmónicas, mas é uma sobreposição de ondas harmónicas com uma distribuição de frequências particular. Por exemplo, a luz solar tem um espectro contínuo de frequências na banda visível, que pode ser separado por meio de um prisma (figura 12.9).

Dentro de um meio diferente do vácuo, a constante de Coulomb  $k$  na equação 12.13 deverá ser dividida pela constante dielétrica  $K$  do meio. Isso conduz a uma velocidade da luz menor; por outro lado, no vidro a constante dielétrica diminui com o aumento da frequência e o índice de refração é inversamente proporcional à velocidade da luz. Assim o desvio da luz quando passa por um prisma de vidro é maior para a luz com maior frequência (violeta) e menor para as diferentes cores. A luz branca é separada nas diferentes frequências na passagem pelo prisma.



**Figura 12.9.:** Decomposição espectral da luz solar por um prisma.

## 12.7. Teoria ondulatória da luz

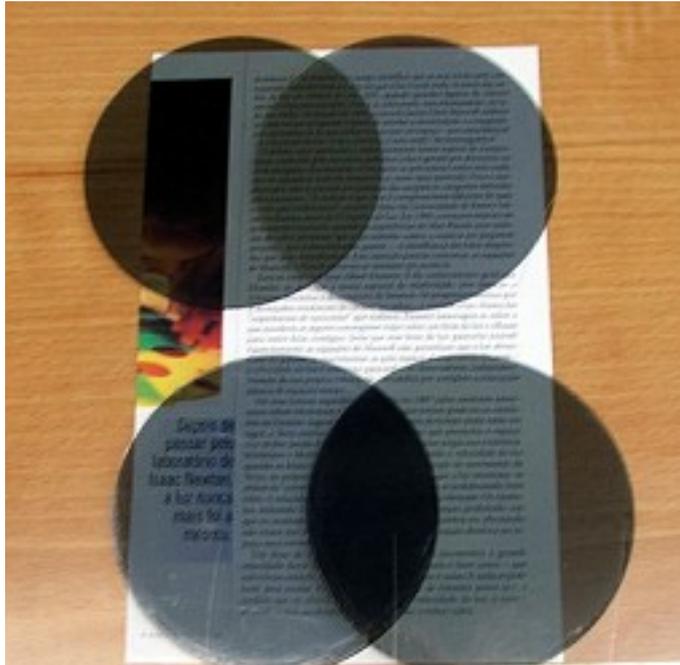
Existem vários fenômenos que corroboram que a luz é uma onda; por exemplo, a interferência, difração e polarização. Alguns cristais têm a propriedade de **polarizar** a luz: só deixam passar uma parte da luz incidente. Se colocarmos um segundo filtro polarizador a seguir ao primeiro, rodando um dos filtros existe uma posição em que não passa nenhuma luz.

Se observamos com um filtro polarizador a luz refletida numa superfície, rodando o filtro existe uma posição em que não se consegue ver a luz refletida

A luz normalmente é uma sobreposição de ondas com campos oscilando em diferentes direções. Num filtro polarizador as moléculas estão orientadas numa direção determinada, o eixo do polarizador, e só deixam passar a luz polarizada nessa direção (direção do campo elétrico).

A luz refletida numa superfície é polarizada na direção tangente à superfície. Um filtro polarizador com o seu eixo perpendicular a essa superfície não deixa passar nenhuma luz. Uma forma de saber se as lentes nuns óculos de sol estão polarizadas ou não, consiste em olhar para um reflexo e rodar a lente; se estiver polarizada, deverá existir um ângulo em que os reflexos desaparecem.

Os cristais líquidos têm a propriedade de orientar as suas moléculas numa direção, quando são atravessados pela corrente elétrica, tornando-se polarizadores. Esse é o princípio usado nos ecrãs LCD (*Liquid Crystal Display*) de calculadoras, telemóveis e televisores. A luz que sai do ecrã é polarizada com um filtro polarizador e a seguir, passa por pontos onde existem vários cristais líquidos, com correntes elétricas consegue-se controlar os pontos onde os cristais serão polarizados perpendicularmente ao primeiro polarizador, sem deixar passar luz.



**Figura 12.10.:** Dois filtros polarizadores com os eixos paralelos (acima) e com os eixos perpendiculares (abaixo).

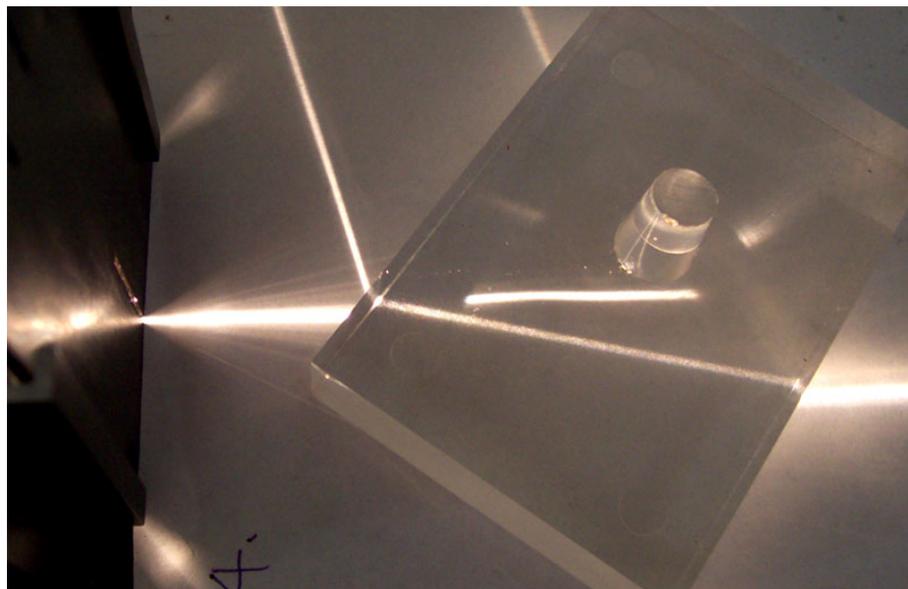
## 12.8. Teoria corpuscular da luz

Antes da descoberta das ondas eletromagnéticas por parte de Maxwell, existia um debate na comunidade científica, que se estendia por anos entre os que defendiam a teoria corpuscular proposta por Newton no século XVII, e os que defendiam a teoria ondulatória proposta por Huygens, um contemporâneo de Newton.

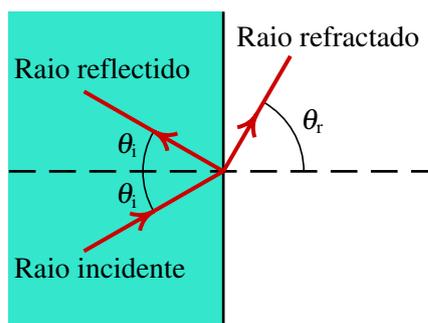
Segundo a teoria corpuscular, a luz é formada por pequenas partículas que saem da fonte e se deslocam em linha reta. Assim explica-se facilmente a existência de raios de luz, que se deslocam em linha reta. A figura 12.11 mostra um raio de luz que entra na esquerda e é refletido e refratado na superfície de uma placa de acrílico.

O ângulo entre o raio refletido e a perpendicular à superfície é igual ao ângulo entre essa perpendicular e o raio incidente. Isso é o mesmo que acontece quando são disparadas partículas contra uma superfície rígida. No raio refratado, a luz passa de um meio para outro diferente; nesse caso os ângulos que os raios incidente e refratado fazem com a perpendicular à fronteira entre os meios já não são iguais (figura 12.12). A relação entre esses ângulos depende dos meios. A teoria corpuscular da luz consegue explicar o fenômeno da refração admitindo que a velocidade da luz nos dois meios é diferente.

A teoria ondulatória da luz também consegue explicar a criação de um feixe de luz, embora o argumento não seja tão intuitivo como no caso da teoria corpuscular. As ondas também verificam as leis da reflexão e da refração.



**Figura 12.11.:** Raios refletido e refratado numa superfície.



**Figura 12.12.:** Ângulos de incidência e de refração de um raio de luz que é refletido e refratado na interface entre dois meios.

No caso da refração há uma diferença importante entre as previsões das duas teorias. Quando a luz passa do ar para a água, vidro ou acrílico, o raio refratado aproxima-se da normal à superfície. Segundo a teoria corpuscular, isso implica uma velocidade da luz maior no vidro do que no ar. Na teoria ondulatória, esse facto implica uma velocidade da luz menor no vidro do que no ar.

Na época de Newton não era fácil medir com precisão a diferença da velocidade da luz no vidro e no ar, e o prestígio de Newton fez com que fosse dada maior credibilidade à teoria corpuscular do que à teoria ondulatória. Hoje em dia sabemos que a velocidade da luz no vidro é de facto menor do que no ar, como prevê a teoria ondulatória. A teoria eletromagnética de Maxwell acabou com o debate, ficando estabelecido, sem lugar a dúvida, que a luz é uma onda eletromagnética.

No entanto, no fim do século XIX foi descoberto o **efeito fotoelétrico**, que não pode ser

explicado com a teoria ondulatória. Einstein explicou esse efeito em 1905, através da teoria dos fótons: a luz é formada por partículas designadas de **fótons**. Cada fóton transporta uma energia igual a:

$$U = hf \quad (12.39)$$

em que  $f$  é a frequência da onda associada ao fóton e  $h$  é a constante de Planck:

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (12.40)$$

Assim, a energia de uma onda eletromagnética não pode ter qualquer valor, mas apenas múltiplos inteiros do **quantum** de energia  $hf$ , já que o número de fótons tem que ser um número inteiro.

Numa onda clássica, a energia pode ser absorvida de forma contínua; nomeadamente, a onda pode transferir qualquer parte da sua energia a um sistema. No caso de uma onda quântica, como as ondas eletromagnéticas, a transferência de energia a um sistema só pode ser feita por absorção de alguns fótons; a energia transferida é a soma das energias desses fótons e, portanto, deverá ser um múltiplo inteiro do quantum de energia  $hf$ .

Hoje em dia acreditamos que os fótons, e qualquer outra partícula conhecida tem também uma natureza ondulatória. A energia de um fóton ou de outra partícula é produzida ou absorvida em quantidades discretas, mas é transportada de um ponto para outro na forma de uma onda. Todas as formas de matéria e energia apresentam propriedades de onda e de partícula. Esse fenómeno, designado de **dualidade onda-partícula**, é a base da física quântica.

## 12.9. Díodos emissores de luz (LED)

Os **díodos emissores de luz** (LED) são dispositivos com um cátodo e um ânodo, identificados como se mostra na figura 12.13. Ligando uma diferença de potencial de forma que o potencial do ânodo seja maior que o potencial do cátodo e a diferença superior a um valor mínimo, o LED produz luz monocromática. A imagem de abertura deste capítulo mostra vários tipos de LED. Quando o potencial do ânodo for menor que o potencial do cátodo, o LED não deixa passar corrente e não acende .



**Figura 12.13.:** LED e diagrama de circuito. O cátodo costuma ser um fio mais curto e estar perto de uma zona onde a cobertura plástica é plana.

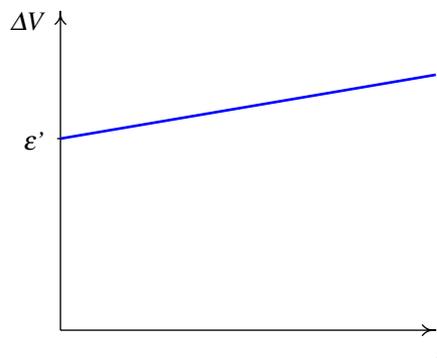
A energia eletrostática que os portadores de carga perdem na passagem da interface entre os dois semicondutores é transformada em luz. Essa energia corresponde à diferença entre dois níveis de energia no semicondutor, e tem um valor específico próprio dos semicondutores usados no LED.

Como vimos, a energia que transporta cada fóton é dada pela equação 12.39. Consequentemente, os fótons emitidos no LED terão todos aproximadamente a mesma frequência, igual à diferença entre os níveis de energia dos elétrons nos dois eletrodos do LED, dividida pela constante de Planck; isso implica que a luz do LED é monocromática. Assim, a cor da luz emitida pelo LED dependerá do semicondutor usado. A tabela 12.1 mostra as cores próprias de alguns semicondutores.

**Tabela 12.1.:** Cores associadas a alguns semicondutores usados atualmente.

Semicondutor	Cor da luz	Comprimento de onda
Arsenieto de gálio e alumínio	Infravermelha	880 nm
Arsenieto de gálio e alumínio	Vermelha	645 nm
Fosfato de alumínio, índio e gálio	Amarela	595 nm
Fosfato de gálio	Verde	565 nm
Nitreto de gálio	Azul	430 nm

Quando circula corrente pelo LED, cada carga de condução que atravessa a interface no LED perde uma energia correspondente à energia de um fóton. Assim, a curva característica do LED será semelhante à característica de um receptor, com ordenada na origem positiva, e declive constante positivo (figura 12.14).



**Figura 12.14.:** Característica tensão-corrente de um LED.

A força contra-eletromotriz do LED,  $\varepsilon'$  (ordenada na origem da característica tensão-corrente), é a energia, por unidade de carga, que as cargas de condução perdem na passagem pelo LED e que é convertida em luz.

Assim, a energia que cada elétron perde quando atravessa a interface entre os dois semicondutores é igual a:  $e\varepsilon'$ . Essa energia é a energia do fóton que será emitido:

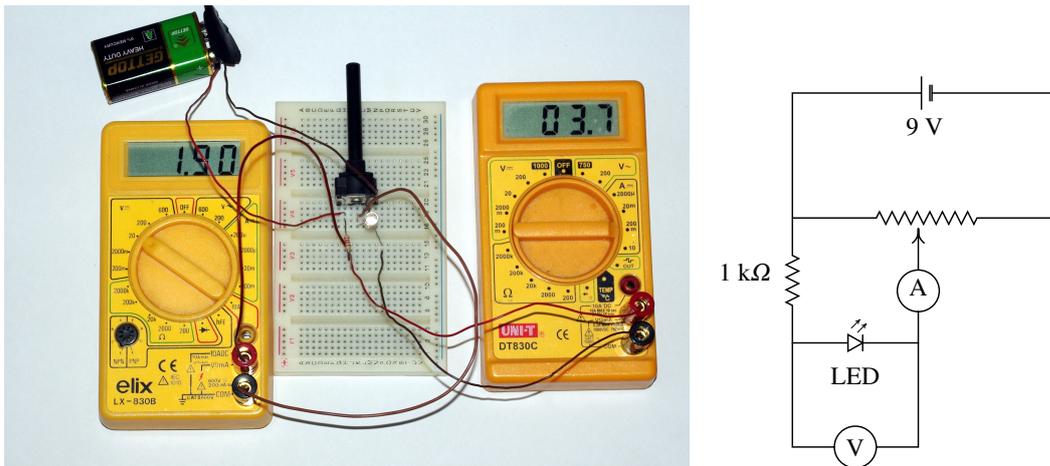
$$e\varepsilon' = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad (12.41)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz e  $\lambda$  o comprimento de onda da luz emitida.

Resolvendo para  $h$  na equação 12.41 obtemos:

$$h = \frac{e\epsilon'\lambda}{c} \quad (12.42)$$

Essa equação é útil para medir experimentalmente o valor da constante de Planck, a partir da característica tensão-corrente de um LED usando, por exemplo, a montagem experimental apresentada na figura 12.15.



**Figura 12.15.:** Circuito usado para determinar a característica de um LED.

A resistência de  $1\text{ k}\Omega$  é usada para evitar que a corrente no LED ultrapasse uns poucos miliampere e não queime o LED. Se o LED estiver ligado no sentido correto, deverá produzir luz. Com os valores medidos da diferença de potencial em função da corrente desenha-se a curva característica do LED, que pode ser ajustada por uma reta. A ordenada na origem dessa reta,  $\epsilon'$  e o valor do comprimento de onda dado do LED (tabela 12.1) permitem obter o valor da constante de Planck a partir da equação 12.42.

## Perguntas

- Qual das afirmações é verdadeira para uma onda eletromagnética no vácuo? Quanto menor for o período:
  - Menor o seu comprimento de onda.
  - Maior a sua velocidade.
  - Menor a sua amplitude.
  - Maior a sua amplitude.
  - Nenhuma das outras respostas.
- Qual dos seguintes fenômenos é uma prova a favor da teoria ondulatória da luz, contra a teoria corpuscular?
  - Refração da luz.
  - Efeito fotoelétrico.
  - Reflexão da luz.
  - Polarização da luz.
  - O arco iris.

3. Uma onda eletromagnética harmónica tem frequência de 2.0 GHz. Calcule o comprimento de onda.
- A. 30 m      C. 6.67 m      E. 3.0 m  
B. 15 cm      D. 150 m
4. Que tipo de radiação é uma onda eletromagnética com comprimento de onda de 1 cm?
- A. Luz visível.      D. Microonda.  
B. Raios gama.      E. Raios X.  
C. Onda de rádio.
5. Uma onda eletromagnética propaga-se no sentido positivo do eixo dos  $z$ . Num certo ponto e num certo instante, o campo elétrico da onda aponta na direção e sentido positivo do eixo dos  $y$ . Em que direção e sentido apontará o campo magnético nesse ponto e no mesmo instante?
- A. No sentido positivo do eixo dos  $y$ .  
B. No sentido negativo do eixo dos  $y$ .  
C. No sentido positivo do eixo dos  $x$ .  
D. No sentido negativo do eixo dos  $x$ .  
E. No sentido negativo do eixo dos  $z$ .

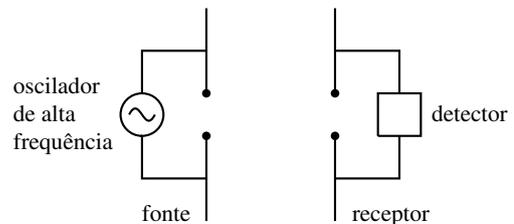
## Problemas

1. Uma onda eletromagnética propaga-se no vácuo, no sentido positivo do eixo dos  $x$ . No instante  $t = 0$ , o campo elétrico em função de  $x$  é dado pela função

$$E = \frac{50}{x^2 + 2} \quad (\text{unidades SI})$$

Calcule o campo no ponto  $x = 50$  m, no instante  $t = 0.2 \mu\text{s}$ .

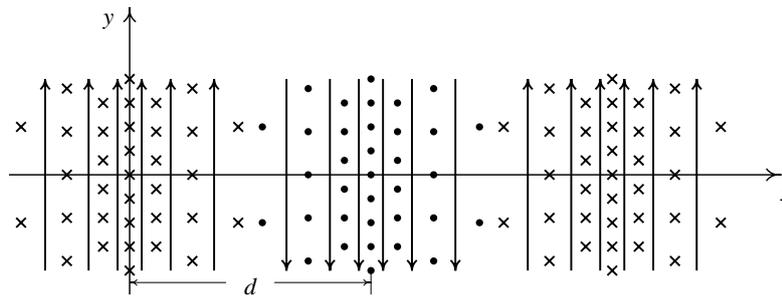
2. Em 1886 Heinrich Hertz conseguiu produzir e detetar ondas de rádio, pela primeira vez, com o aparelho da figura. Hertz observou que não se detetava nenhuma onda quando se colocava uma placa metálica entre a fonte e o receptor; explique porque. Também descobriu que não era detetada nenhuma onda se o receptor fosse rodado  $90^\circ$  em relação à linha que une a fonte e o receptor; explique porque.



3. Uma onda eletromagnética plana propaga-se no sentido negativo do eixo dos  $y$ . Num dado instante  $t = 0$  o valor do campo elétrico é  $E = E_{\text{máx}} \sin(2.25 \times 10^7 y)$ , onde  $y$  é medido em metros. (a) Calcule o comprimento de onda. (b) Calcule a frequência.
4. Considere uma onda eletromagnética plana, polarizada na direção do eixo dos  $x$ , que se propaga na direção positiva do eixo dos  $y$ , com frequência de 12 MHz e amplitude  $E_{\text{máx}} = 0.008$  V/m. (a) calcule o período e o comprimento de onda (b) escreva uma expressão para  $\vec{E}(t)$  e para  $\vec{B}(t)$ .
5. Uma onda eletromagnética plana propaga-se no sentido negativo do eixo dos  $x$ . Num dado instante  $t = 0$  o campo elétrico é  $\vec{E} = E_{\text{máx}} \sin(2.25 \times 10^7 x) \vec{e}_z$ , onde  $x$  é medido em metros. (a) Calcule o comprimento de onda. (b) Calcule a frequência. (c) Diga qual é a direção de polarização da onda.
6. Uma lâmina metálica muito extensa encontra-se sobre o plano  $xy$ . A lâmina é ligada a uma fonte variável que produz um campo elétrico uniforme no plano  $xy$ , mas variável no tempo segundo a equação:  $\vec{E} = E_{\text{máx}} \sin(\omega t) \vec{e}_x$ , onde  $E_{\text{máx}}$  e  $\omega$  são constantes. O

campo elétrico na lâmina origina uma onda eletromagnética plana. Escreva as funções que representam os campos elétrico e magnético dessa onda, em função do tempo e da posição.

- Usando a equação 12.17, demonstre que se o campo elétrico for  $E = f(y + ct)$ , o campo magnético deverá ser  $B = -f(y + ct)/c$ , e se o campo elétrico for  $E = g(y - ct)$ , o campo magnético será  $B = g(y - ct)/c$ .
- A figura representa o campo eletromagnético de uma onda plana de 420 MHz, no instante  $t = 0$ . As linhas de campo verticais representam o campo elétrico e as linhas perpendiculares à folha de papel são as linhas do campo magnético. Calcule a distância  $d$  e escreva o vetor do campo magnético em função do tempo e da coordenada  $x$ .



- Calcule a energia, em joules e em elétron-volts, dos fótons na luz laranja, com comprimento de onda de 616 nm.
- Determine o comprimento de onda de um fóton com energia igual a 2.00 eV. A que tipo de radiação corresponde esse fóton?

# A. Transformadas de Laplace

A transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  é definida pelo integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (\text{A.1})$$

Repare que o resultado desse integral já não depende de  $t$  mas sim do parâmetro  $s$ , que admitiremos ser um número real.

Neste livro, para representar a transformada de Laplace, usaremos um til por cima da letra que representa a função. Por exemplo,  $\tilde{g}(s)$ , é a função obtida aplicando a transformada de Laplace à função  $g(t)$ .

Observe que de acordo com a definição, a variável  $s$  terá as unidades do inverso do tempo, nomeadamente, unidades de frequência. Assim,  $g(t)$  e  $\tilde{g}(s)$  costumam ser designadas de representações da função no **domínio do tempo** e no **domínio da frequência**.

Igual que no caso da derivação, uma forma rápida de calcular a transformada de uma função é por meio de algumas regras simples que vamos obter nas seguintes seções. A transformada inversa de uma função  $\tilde{f}(s)$  é a função  $f(t)$  cuja transformada de Laplace seja igual a  $\tilde{f}(s)$ .

Para que a transformada de Laplace de  $f(t)$  exista, é preciso que  $f(t)$  verifique as duas propriedades seguintes:

1. A função deverá ser **parcelarmente contínua**, isto é,  $f(t)$  poderá ter alguns pontos isolados onde é descontínua, mas será contínua em cada intervalo entre dois pontos de descontinuidade.
2. A função  $f(t)$  deve ser uma função de **ordem exponencial**: existe um número real  $a$  tal que o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| e^{-at} \quad (\text{A.2})$$

existe. O domínio da transformada de Laplace de  $f(t)$  será  $s > a$ .

A localização das descontinuidades de  $f(t)$  determinará o domínio das frequências  $s$  para as quais o integral  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  existe. Mas para as nossas aplicações não precisaremos identificar esse domínio de frequências.

## A.1. Propriedades da transformada de Laplace

### A.1.1. Linearidade

Para quaisquer duas funções  $f(t)$  e  $g(t)$ , e duas constantes  $a$  e  $b$ , verifica-se:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\tilde{f}(s) + b\tilde{g}(s) \quad (\text{A.3})$$

consequentemente, a transformada inversa também é um operador linear:

$$\mathcal{L}^{-1}\{a\tilde{f}(s) + b\tilde{g}(s)\} = af(t) + bg(t) \quad (\text{A.4})$$

### A.1.2. Derivada da transformada

$$\frac{d\tilde{f}}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = - \int_0^{\infty} tf(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}\{tf(t)\} \quad (\text{A.5})$$

derivando  $n$  vezes obtemos

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n \tilde{f}}{ds^n} \quad (\text{A.6})$$

### A.1.3. Transformada da derivada

Integrando por partes:

$$\mathcal{L}\{f'\} = \int_0^{\infty} f' e^{-st} dt = f e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f e^{-st} dt \quad (\text{A.7})$$

o último integral é a transformada de  $f$ , definida em  $s > a$ . Para  $s > a$  o limite do primeiro termo, quando  $t$  for infinito, é zero já que  $f$  é de ordem exponencial  $a$

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0) \quad (\text{A.8})$$

A transformada de derivadas de ordem superior calcula-se aplicando a mesma propriedade várias vezes, por exemplo, a transformada da segunda derivada é igual a:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s\mathcal{L}\{y'\} - y'(0) = s[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - y'(0) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) \quad (\text{A.9})$$

### A.1.4. Deslocamento na frequência

A transformada do produto entre uma função exponencial e uma função qualquer é:

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} f e^{(a-s)t} dt = \tilde{f}(s-a) \quad (\text{A.10})$$

Nomeadamente, quando se multiplica a função por  $e^{at}$ , no domínio do tempo, a sua representação no domínio das frequências é deslocada  $a$  unidades no sentido positivo do eixo da frequência  $s$ .

### A.1.5. Deslocamento no tempo

A função **escalão unitário**, ou função de Heaviside. é definida assim:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & t \leq a \\ 1, & t > a \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Consequentemente, o produto:

$$u(t-a)f(t-a) \quad (\text{A.12})$$

é a função  $f(t)$  deslocada uma distância  $a$  no sentido positivo do eixo do tempo  $t$ , sendo nula para  $t < a$ . Calculando a transformada de Laplace temos:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(r)e^{-s(r+a)} dr = e^{-as} \int_0^{\infty} f(r)e^{-sr} dr$$

e concluímos que:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as} \tilde{f}(s) \quad (\text{A.13})$$

Isto é, quando a função é deslocada  $a$  unidades no sentido positivo do tempo  $t$ , a sua representação no domínio das frequências fica multiplicada por  $e^{-as}$ .

Essa propriedade é útil para calcular transformadas de funções com descontinuidades. Uma outra forma equivalente é a seguinte:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\} \quad (\text{A.14})$$

## A.2. Transformadas de funções importantes

### A.2.1. Polinómios

A transformada de  $t^p$ , onde  $p$  é qualquer número real, é:

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^{\infty} t^p e^{-st} dt \quad (\text{A.15})$$

usando a mudança de variável  $u = st$ , o integral transforma-se numa função gama:

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^{\infty} (u/s)^p e^{-u} \frac{du}{s} = s^{-(p+1)} \int_0^{\infty} u^p e^{-u} du = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \quad (\text{A.16})$$

em particular, quando  $p$  for um número inteiro positivo  $n$ ,

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\text{A.17})$$

e para  $n = 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad (\text{A.18})$$

### A.2.2. Funções exponenciais

Aplicando a propriedade de deslocamento na frequência  $s$ , podemos calcular a transformada da função exponencial

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \mathcal{L}\{1\}(s-a) = \frac{1}{s-a} \quad (\text{A.19})$$

e usando a propriedade da derivada da transformada

$$\mathcal{L}\{t e^{at}\} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s-a} \right) = \frac{1}{(s-a)^2} \quad (\text{A.20})$$

O mesmo resultado podia ter sido obtido a partir da transformada de  $t$ , usando a propriedade de deslocamento em  $s$ .

### A.2.3. Funções sinusoidais

Para calcular a transformada de Laplace das funções sinusoidais é conveniente usar a fórmula de Euler:

$$f(t) = f_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re} \left( f_{\text{máx}} e^{i(\omega t + \varphi)} \right) = \text{Re} \left( f_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t} \right) \quad (\text{A.21})$$

onde  $\text{Re}()$  é a função que dá a parte real do seu argumento. Portanto, a transformada de Laplace de  $f(t)$  é:

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L} \left\{ \text{Re} \left( f_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t} \right) \right\} = \text{Re} \left( f_{\text{máx}} e^{i\varphi} \mathcal{L} \left\{ e^{i\omega t} \right\} \right) = \text{Re} \left( \frac{f_{\text{máx}} e^{i\varphi}}{s - i\omega} \right) \quad (\text{A.22})$$

Por simplicidade, escreveremos simplesmente:

$$\tilde{f}(s) = \frac{f_{\text{máx}} e^{i\varphi}}{s - i\omega} \quad (\text{A.23})$$

ficando implícito que só interessa a parte real dessa função.

### A.2.4. Impulso unitário

A função **impulso unitário**, ou função delta de Dirac,  $\delta(t - a)$ , é a derivada da função escalão unitário  $u(t - a)$ . Assim, seria nula em todos os pontos, excepto em  $t = a$  onde seria infinita. O impulso unitário  $\delta(t - a)$  não é realmente uma função, mas o importante no caso das transformadas de Laplace é que, para qualquer função  $f(t)$ , contínua em  $a$ , verifica a propriedade:

$$\int_{-\infty}^t f(z)\delta(z - a) dz = \begin{cases} 0, & t \leq a \\ f(a), & t > a \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

A transformada da função impulso unitário será a transformada da derivada da função escalão unitário. Aplicando a propriedade da transformada da derivada, obtemos:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = e^{-a} \quad (\text{A.25})$$

As propriedades da transformada de Laplace e as transformadas das funções que temos calculado neste capítulo encontram-se resumidas na tabela [A.1](#).

Função	Transformada
$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at} f(t)$	$\tilde{f}(s - a)$
$f'(t)$	$s\tilde{f}(s) - f(0)$
$\int_0^t f(z) dz$	$\frac{1}{s} \tilde{f}(s)$
$t f(t)$	$-\frac{d\tilde{f}}{ds}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty \tilde{f}(r) dr$
$u(t - a) f(t - a)$	$e^{-as} \tilde{f}(s)$
$u(t - a) f(t)$	$e^{-as} \mathcal{L}\{f(t + a)\}$
$\delta(t - a)$	$e^{-as}$
$f\left(\frac{t}{a}\right)$	$a \tilde{f}(as)$
$f_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi)$	$\operatorname{Re} \left( \frac{f_{\text{máx}} e^{i\varphi}}{s - i\omega} \right)$

**Tabela A.1.:** Propriedades da transformada de Laplace.

## B. Constantes e dados numéricos

**Tabela B.1.:** Prefixos SI

Fator	Prefixo	Símbolo	Fator	Prefixo	Símbolo
$10^{18}$	exa	E	$10^{-1}$	deci	d
$10^{15}$	peta	P	$10^{-2}$	centi	c
$10^{12}$	tera	T	$10^{-3}$	mili	m
$10^9$	giga	G	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^6$	mega	M	$10^{-9}$	nano	n
$10^3$	quilo	k	$10^{-12}$	pico	p
$10^2$	hecto	h	$10^{-15}$	femto	f
$10^1$	deca	da	$10^{-18}$	ato	a

**Tabela B.2.:** Valores de algumas constantes fundamentais

Constante	Símbolo	Valor	Unidades
Constante de Coulomb	$k$	$9 \times 10^9$	m/F
Constante magnetostática	$k_m$	$10^{-7}$	N/A <sup>2</sup>
Velocidade da luz no vácuo	$c$	$2.998 \times 10^8$	m/s
Constante de Planck	$h$	$6.626 \times 10^{-34}$	J·s
Carga elementar	$e$	$1.602 \times 10^{-19}$	C
Massa do elétron	$m_e$	$9.109 \times 10^{-31}$	kg
Massa do próton	$m_p$	$1.673 \times 10^{-27}$	kg

**Tabela B.3.:** Constante dielétrica e rigidez dielétrica de alguns materiais.

<b>Material</b>	<b>Constante dielétrica, <math>K</math></b>	<b>Rigidez, <math>E_{\text{máx}}</math> (kV/mm)</b>
Água (20°C)	80	—
Ar seco	1.00059	3
Óleo	2.24	12
Papel	3.7	16
Acrílico	3.4	40
Vidro pirex	5.6	14
Porcelana	7	5.7
Poliéster	2.55	24
Parafina	2.1 - 2.5	10

**Tabela B.4.:** Resistividade e coeficiente de temperatura de alguns materiais, a 20°C.

<b>Material</b>	$\rho_{20}$ (n $\Omega$ ·m)	$\alpha_{20}$ (°C <sup>-1</sup> )
Prata	16	0.0038
Cobre	17	0.0039
Alumínio	28	0.0039
Tungsténio	55	0.0045
Ferro	100	0.0050
Chumbo	220	0.0043
Níquel-crómio	1000	0.0004
Grafite	35000	-0.0005

## C. Créditos fotográficos

A maior parte das fotografias e figuras neste manual são originais e são colocadas aqui no domínio público. As restantes figuras têm todas licenças livres. A principal fonte dessas figuras foi o arquivo da Wikimedia Commons (<http://commons.wikimedia.org>). A lista de autores e licenças é a seguinte:

- Fotografia do circuito na capa: autor: chr (<http://www.instructables.com>). Licença: Creative Commons.
- Fig. 1.1 (pág. 2). Autor: DJIndica (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Fig. 1.2 (pág. 3). Autor: Yzmo (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.
- Pág. 15. Autor: GuidoB (Wikimedia Commons), GFDL.
- Fig. 2.1 (pág. 19). Gravura antiga. Domínio público.
- Fig. 2.2 (pág. 20). Gravura antiga. Domínio público.
- Fig. 2.7 (pág. 25). Autor: Alby (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Pág. 33. Autor: Victor Ward. Domínio público.
- Fig. 3.3 (pág. 35). Autor: Tumi-1983 (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Fig. 3.8 (pág. 38). Autor: Bill Bertram. Licença: GFDL.
- Fig. 3.12 (pág. 42). Peter Nussbaumer. Licença: GFDL.
- Fig. 3.13 (pág. 42). Autor: Yosemite (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.
- Fig. 4.3 (pág. 53). Autor: Bert Hickman. Licença: Creative Commons Attribution.
- Fig. 4.4 (pág. 54). Autor: Mircea Madau. Domínio público.
- Fig. 4.6 (pág. 56). Maxwell Technologies. Licença: GFDL.
- Fig. 4.7 (pág. 57). Autor: Gil Monteiro. Reproduzida com autorização do autor.
- Pág. 63. Autor: chr (<http://www.instructables.com>). Licença: Creative Commons.
- Pág. 93. Author: Arian Kriesch Akriesch. Licença: Creative Commons.
- Pág. 107. H.J. Sommer III. Licença: Creative Commons.
- Fig. 8.1 (pág. 108). Autor: TStein (Wikimedia Commons). Licença: Creative Commons.
- Fig. 8.4 (pág. 111). Autor: Wapcaplet (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.
- Fig. 8.11 (pág. 117). Autor: Stannered (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.

- Pág. 123. Autor: Willtron (Wikimedia Commons). Licença: Creative Commons.
- Pág. 159. Autor: Nikola Tesla. Domínio público.
- Fig. 9.9 (pág. 134). Autor: Inkwina (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Fig. 9.10 (pág. 135). Autor: Anton (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.
- Pág. 139. Autor: glacial23 (Wikimedia Commons). Licença: Creative Commons.
- Pág. 179. Autor: A frank99 (Wikimedia Commons). Licença: Creative Commons.
- Fig. 12.8 (pág. 190). Autor: Inductiveload (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.
- Fig. 12.9 (pág. 191). Autor: NASA. Domínio público.
- Fig. 12.11 (pág. 193). Autor: fir0002 (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.

# Respostas das perguntas e problemas

## 1. Carga e força elétrica

### Perguntas

1. A. Atrativa
2. E. Ter alguns elétrons livres.
3. E.  $3.4 \times 10^{-2}$  N.
4. D. Cada uma delas fica com  $Q/3$ .
5. C. Negativa.

### Problemas

1. Ordem de grandeza de  $10^{-10}$  C.
2. (a)  $6 \mu\text{C}$ , e  $4 \mu\text{C}$  (b)  $12 \mu\text{C}$ , e  $-2 \mu\text{C}$
3.  $5.1 \times 10^{11}$  N/C.
4. A força eletrostática é  $2.7 \times 10^{12}$  vezes maior que o peso.
5. A tensão no fio do lado esquerdo é  $285 \mu\text{N}$  e no fio do lado direito  $560 \mu\text{N}$ .
6. (a)  $1.01 \times 10^{-3}$  N/C (b)  $2.67 \times 10^3$  m/s.
7. A terceira carga é  $-0.343q$ , e encontra-se entre as outras duas cargas, a uma distância  $0.414d$  da carga  $q$
8. Com origem na carga  $q_1 = -5$  nC, eixo dos  $x$  na direção de  $q_2 = 9$  nC, e eixo dos  $y$  na direção de  $q_3 = 7$  nC, as forças são:

$$\vec{F}_1 = (1.35\vec{e}_x + 3.15\vec{e}_y) \text{ mN}$$

$$\vec{F}_2 = (-0.12\vec{e}_x - 0.71\vec{e}_y) \text{ mN}$$

$$\vec{F}_3 = (-1.23\vec{e}_x - 2.44\vec{e}_y) \text{ mN}$$

$$\text{O campo em P é: } (-0.545\vec{e}_x - 0.135\vec{e}_y) \text{ N}/\mu\text{C}$$

## 2. Corrente e força eletromotriz

### Perguntas

1. D. É independente do tamanho...
2. D. 3.3 centímetros.
3. A. 48.6 kC
4. D. 69 %
5. C. 0.88 A

### Problemas

1. 8.80 Mm/s.
2. (a)  $E = 6.4 \times 10^{-16}$  J,  $v = 37.5$  Mm/s (b) 5 kV/m
3. (a)  $5.4 \times 10^5$  C (b) 72%
4. 200 horas
5. 6.9 kW
6. 9.936 kJ
7. (a) 1200 C (b) 120 A
8. (a) 0.8 mA. (b) 2.4 mJ. (c) 1.2 mW. (c) 2.999 Ah.
9. (a) 10 A. (b) 4.4 centímetros.

## 3. Resistência e Lei de Ohm

### Perguntas

1. B. 0.0058
2. C.  $R/2$
3. E. 1.44
4. C. 220 V, 150 W
5. A. 0.48 kW

### Problemas

1. 24.8°C
2. 1.2  $\Omega$
3. (a) 1.5  $\Omega$ . (b) 9 V
4.  $\epsilon/r$ .
5. Quando a lâmpada está acesa, a temperatura do filamento de tungstênio é muito mais elevada do que a temperatura ambiente e, portanto, a resistência também é muito mais elevada. A temperatura do filamento é da ordem de 2812°C
6.  $\epsilon = 20$  V. Nas resistências de 3 k $\Omega$  e 6 k $\Omega$ ,  $\Delta V = 4$  V; na resistência de 8 k $\Omega$ ,  $\Delta V = 16$  V.
7. (a)  $R = r$  (b)  $\epsilon^2/(4r)$  (c) 0.05  $\Omega$  (d) menor diminuição da diferença de potencial quando a corrente aumentar.

8.  $R_1 = 41.45 \Omega$ ,  $R_2 = 53.95 \Omega$ ,  $R_3 = 4.75 \Omega$
9. (a) 3.12 V (b) 18.7 W    10. 6.6 m    11. 3.0°C
12. Na resistência de 20  $\Omega$ , 55.1 mW. Na resistência de 100  $\Omega$ , 99.2 mW. Na resistência de 150  $\Omega$ , 66.2 mW. Na resistência de 60  $\Omega$ , 54.0 mW. Na resistência de 80  $\Omega$ , 40.5 mW. A fem fornece 315 mW.

## 4. Condensadores

### Perguntas

1. E. É independente da carga acumulada no condutor.
2. C. 180 pF
3. A. 7.0 pF
4. D. 27
5. C. A carga armazenada será maior no condensador com maior capacidade.

### Problemas

1. (a) 400 V. (b) 179 V. (c) O condensador de maior capacidade ocupa um volume maior.
2. (a)  $C = \frac{Kab}{k(b-a)}$  (b) 0.395 nF. (c) Aumenta num fator de 88.87
3. (a)  $q_1 = 3.38 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = 12.1 \mu\text{C}$  e  $q_3 = 15.5 \mu\text{C}$ . (b) 69.6  $\mu\text{J}$
4. 5.55 pF
5. (a)  $3.12 \times 10^{-7}$  J. (b) Sem dielétrico, 15 kV; com dielétrico 200 kV
6. (a) 8 mC (b)  $V = 1600/3$  V,  $Q_1 = 16/3$  mC,  $Q_2 = 32/3$  mC
7. (a) 12 pF. (b) 21.6 pF.
8. 3.15 pC.

## 5. Circuitos de corrente contínua

### Perguntas

1. C. Conservação da carga.
2. C. A corrente.
3. B. 8 mA
4. C.  $I_2 + I_3 = I_1$
5. D.  $V_A > V_C > V_B$

## Problemas

- As duas fontes fornecem potência; a fem de 6 V fornece 5.24 mW, e a fem de 5 V fornece 3.93 mW.
- (a) A que tem resistência interna de  $30 \Omega$ . (b) A que está menos gasta (com resistência interna de  $20 \Omega$ ). (c) 3.32 mA.
- As duas pilhas fornecerão a mesma potência. O inconveniente é que quando a pilha mais gasta descarregar totalmente, o circuito deixará de funcionar, embora a outra pilha ainda tenha alguma carga interna.
- Na resistência de  $20 \Omega$ , 45  $\mu$ W. Na resistência de  $100 \Omega$ , 62.0 mW. Na resistência de  $150 \Omega$ , 82.1 mW. Na resistência de  $60 \Omega$ , 105.8 mW. Na resistência de  $80 \Omega$ , 151.4 mW. A fem fornece 401.4 mW.
- Usando subíndices iguais ao valor da resistência ou condensador, (a)  $I_{1200} = 0$ ,  $I_{200} = 7.5$  mA,  $I_{150} = I_{82} = 40$  mA,  $I_{68} = 32.5$  mA. (b)  $I_{150} = 0$ ,  $I_{1200} = I_{200} = 1.07$  mA,  $Q_{68} = 87.4$  nC (positiva na armadura de baixo e negativa na de cima),  $Q_{82} = 597.4$  nC (positiva na armadura da direita e negativa na da esquerda).
- (a) 4.78 mA, de baixo para cima. (b) 2.44  $\mu$ C (positiva na armadura de cima e negativa na de baixo).
- 236.5 nJ.

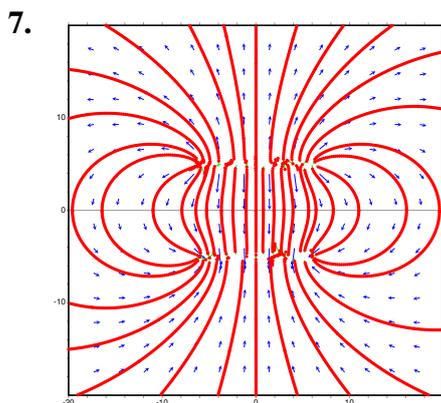
## 6. Campo elétrico

### Perguntas

- B. 4.52 kN/C
- D. 6.4 nC
- C.  $-72\pi$
- C.  $11.3 \times 10^4$  N·m<sup>2</sup>/C
- B. Existe carga negativa dentro da superfície.

### Problemas

- Existe carga positiva, com carga volúmica média igual a  $2.387 \times 10^{-13}$  C/m<sup>3</sup>.
- 1.05 mN
- 8 nC.
- Dentro da casca interna e fora da casca externa, o campo é nulo. Entre as duas cascas, o campo é na direção radial e com módulo  $kQ/r^2$ , onde  $r$  é a distância desde o centro das esferas.
- Se  $r \geq R$ ,  $E = \frac{kQ}{r^2}$ . Se  $r < R$ ,  $E = \frac{kQ}{R^3}r$
- 62.97°



## 7. Potencial eletrostático

### Perguntas

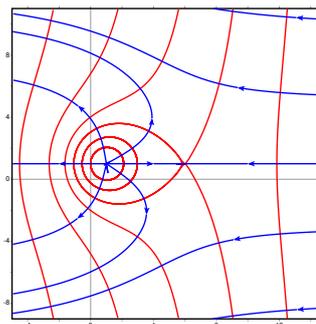
1. E. O trabalho necessário para trazer uma carga desde o infinito até o ponto P é nulo.
2. B. 160 mJ
3. D. 4
4. C.  $E = 0, V > 0$
5. C. 1.5 cm

### Problemas

1.

$$E_x = \frac{1250(x-1)}{[(x-1)^2 + (y-1)^2]^{3/2}} - 50$$

$$E_y = \frac{1250(y-1)}{[(x-1)^2 + (y-1)^2]^{3/2}}$$



O campo é nulo no ponto (6, 1). Trata-se do potencial de uma carga pontual positiva, no ponto (1, 1), dentro de um campo externo uniforme  $\vec{E} = -50\vec{e}_x$ .

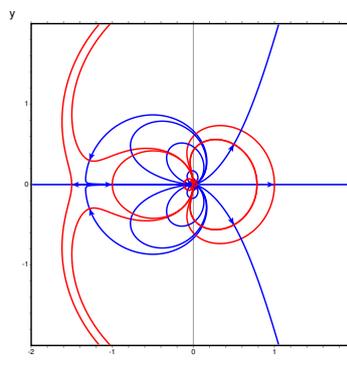
2. 0.3 kV.
3. 3 m, 200 nC
4. 154.3 V
5. (a) 4.2 cm e 2.8 cm. (b)  $-2859$  V

6. (a) 12 nC (b) -48 nC (c) -3 nC

7.

$$E_x = \frac{4x^2 - 2y^2 + 3x^3 + 3xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = \frac{y(6x + 3x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$



8. (a) 187.5 V/m, para baixo (b) negativa (c) para cima (d) -0.169 nC

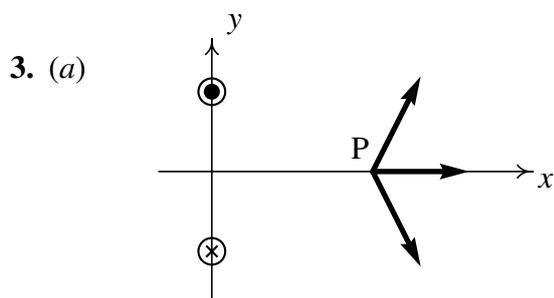
## 8. Campo magnético

### Perguntas

1. D. 2.5  $\mu\text{T}$
2. A. Para cima.
3. A.  $5.3 \times 10^{-14}$  N
4. A. O campo é paralelo ao fio.
5. E.  $30^\circ$

### Problemas

1. 1.65 m
2. 10,25 N



(b)  $B = \frac{4k_m I a}{x^2 + a^2}$

4.  $\vec{B}_1 = B_1 \vec{e}_x$ ,  $\vec{B}_2 = B_{2x} \vec{e}_x + (E/v) \vec{e}_z$ , onde  $B_1$ ,  $B_{2x}$  e  $E$  podem ser quaisquer funções, não necessariamente constantes. As condições obtidas são válidas para qualquer tipo de partículas
5. (a)  $2 \times 10^6$  m/s. (b)  $3.34 \times 10^{-15}$  J. (c)  $1.82 \times 10^{-18}$  J
6.  $3.47 \times 10^{-5}$  N·m
7. (a)  $-(\sqrt{3}/2) \vec{e}_y + (1/2) \vec{e}_z$ . (b)  $\vec{e}_x$ . (c)  $-(1/2) \vec{e}_y - (\sqrt{3}/2) \vec{e}_z$ . (d) 2.5 mm
8.  $(-59.4 \vec{e}_x - 102.9 \vec{e}_y + 2388.1 \vec{e}_z)$  nT

## 9. Indução eletromagnética

### Perguntas

1. B. Poderá gerar potência elétrica que pode ser alimentada de volta para a central.
2. C. 0.024 V
3. E. Nula.
4. E. Diminui num fator de 4.
5. C. 91 mV

### Problemas

1. O fluxo aumenta até um valor máximo, decresce até um valor mínimo local em  $t_1$ , volta a aumentar até o valor máximo e a seguir diminui monotonicamente. A corrente troca de sentido 3 vezes, nos 3 pontos onde o fluxo é máximo ou mínimo. Enquanto o anel se aproxima desde longe a corrente aumenta desde zero, e quando o anel já está a afastar-se longe do íman, a corrente decresce até zero.
2.  $5.67 \times 10^{-6} \text{ V}$
3. 0.33 V
4. 3.5 mV
5.  $v = \frac{mgR}{B^2 d^2}$
6.  $E_i = 0.0018 e^{-t/15}$ , na direção tangente ao anel e no sentido horário.
7. 0.18 V, no sentido anti-horário visto desde a esquerda.
8. Inicialmente, 100 mA no condensador e 0 no indutor. No fim, 1.96 mA no indutor e 176.1  $\mu\text{C}$  no condensador.
9. (a) 20 mA. (b) A corrente diminui, enquanto a carga aumenta; quando a corrente decresce até zero, a carga atinge um valor máximo. Nesse momento, o condensador começa a descarregar, aparecendo uma corrente que aumenta, no sentido contrário à corrente inicial; quando a carga diminuir até zero, a corrente será máxima e com a mesma intensidade inicial. O ciclo repete-se indefinidamente, já que não existe nenhuma resistência que dissipe energia.

## 10. Processamento de sinais

### Perguntas

1. B.  $\frac{2s}{3s^2 - 2s + 1}$
2. D.  $3e^{-t} - 4e^{2t}$
3. D.  $2te^{-2t}$

4. A.  $\frac{RLs}{RLCs^2 + Ls + R}$

5. D.  $5e^{-t}(1 - e^{-t})$

## Problemas

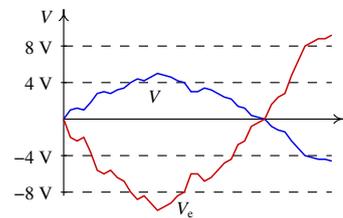
1. (a)  $60 \mu\text{A}$ . (b)  $4 \text{ V}$  no condensador e  $2 \text{ V}$  na resistência. (c)  $0.2 \text{ mC}$ .

2.  $32 \text{ s}$ .

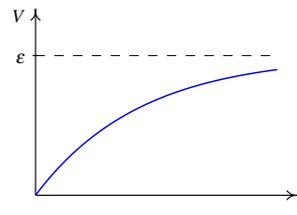
3.  $I(t) = (32/3)e^{-t/15} - 10 + u(t-4)(10 - 8e^{-(t-4)/15})$  (unidades: mA).

4. (a)  $V(t) = -\frac{R_1}{R_1 + R_2}V_e(t)$ . (b)  $-\frac{R_1}{R_1 + R_2}$

(c) O sinal de saída tem sempre a mesma forma do sinal de entrada, mas multiplicado por uma constante menor que 1 e com o sinal trocado.



5. (a)  $\frac{1}{t_Ls + 1}$  (b)  $\varepsilon(1 - e^{-t/t_L})$  (c)



6. (a)  $\frac{R(t_C t_L s^2 + t_L s + 1)}{t_C s + 1}$  (b)  $\frac{(t_C s + 1)\tilde{V}_e}{R(t_C t_L s^2 + t_L s + 1)}$

(c)  $\frac{1}{t_C t_L s^2 + t_L s + 1}$  (d)  $t_C t_L V'' + t_L V' + V = V_e$

7. Equação diferencial:  $t_C V' + V = V_e$

Função de transferência:  $\frac{1}{t_C s + 1}$

Saída:  $V_0 \left( 1 - e^{-t/t_C} - u(t-t_0) \left( 1 - e^{-(t-t_0)/t_C} \right) \right)$

Denomina-se passa-baixo, porque  $\tilde{H}$  é 1 no limite  $s \rightarrow 0$ , e nula no limite  $s \rightarrow \infty$ .

## 11. Circuitos de corrente alternada

### Perguntas

1. E.  $2 \cos(\omega t + \pi/3)$

2. B. 150 mA
3. D. Atrasada  $45^\circ$  em relação à corrente.
4. C. Se a corrente for contínua, a reatância da bobina é menor.
5. C. O ângulo de defasamento é nulo.

## Problemas

1.  $I(t) = 0.669 \sin(314.16t - 1.2421)$  A.
2. (a) 7.94 A. (b) 3.68 mA (c) 1.261 kW.
4.  $f = 1.779$  kHz,  $I_{\text{máx}} = 20$  mA,  $Q_{\text{máx}} = 1.789 \mu\text{C}$ .
5. (a) Tensões em V, correntes em mA, tempo em ms.

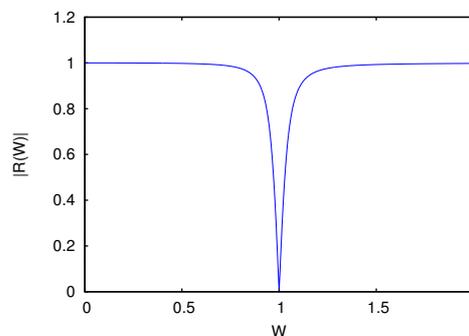
$$\begin{array}{ll} \text{condensador:} & V = 113 \cos(0.378t - 0.847) \quad I = 42.5 \cos(0.378t + 0.724) \\ \text{resistência:} & V = 127 \cos(0.378t + 0.724) \quad I = 42.5 \cos(0.378t + 0.724) \\ \text{indutor:} & V = 170 \cos(0.378t) \quad I = 225 \cos(0.378t - \pi/2) \end{array}$$

- (b) Tensões em V, correntes em mA, tempo em ms.

$$\begin{array}{ll} \text{condensador:} & V = 405 \cos(0.314t) \quad I = 127 \cos(0.314t + \pi/2) \\ \text{resistência:} & V = 325 \cos(0.314t) \quad I = 117 \cos(0.314t) \\ \text{indutor:} & V = 79.9 \cos(0.314t + \pi) \quad I = 127 \cos(0.314t + \pi/2) \end{array}$$

$$6. (a) \quad R(\omega) = \frac{10\omega^2 - 10}{10\omega^2 - 10 - i\omega}$$

$$(c) \quad |R(\omega)| = \frac{10|\omega^2 - 10|}{\sqrt{100\omega^4 - 199\omega^2 + 100}}$$



7. (a) resistência 2.63 M $\Omega$  e reatância  $-1.44$  M $\Omega$ . (b) Uma resistência de 2.63 M $\Omega$  e um condensador de 2.21 nF, ligados em série.
8. A tensão e corrente apresentadas no gráfico apenas poderão ter essas formas sinusoidais algum tempo após ter sido ligada a fonte, quando a resposta transitória já tiver desaparecido. Se a fonte de tensão fosse ligada apenas no instante  $t = 0$ , a corrente não poderia ter nesse instante um valor diferente de zero; em vez da função sinusoidal no gráfico, teríamos uma função que parte de zero e aproxima-se gradualmente da função sinusoidal (resposta transitória mais resposta sinusoidal).
9.  $z = (1.5 + i2.598)$  k $\Omega$

## 12. Ondas eletromagnéticas e luz

### Perguntas

1. A. Menor o seu comprimento de onda.
2. D. Polarização da luz.
3. B. 15 cm
4. D. Microonda.
5. D. No sentido negativo do eixo dos  $x$ .

### Problemas

1. 490 mV/m.
2. O campo elétrico na placa metálica é nulo, o que implica que as ondas não passam de um lado para o outro. O receptor só deteta ondas polarizadas na direção da linha entre as duas esferas no detetor; as ondas produzidas pela fonte estão polarizadas na direção da linha entre as duas esferas na fonte.
3. (a) 279 nm. (b)  $1.074 \times 10^{15}$  Hz.
4. (a)  $P = 83.33$  ns,  $\lambda = 25$  m  
 (b)  $\vec{E} = 0.008 \cos(0.2513y - 75.40 \times 10^6 t + \varphi) \vec{e}_x$   
 $\vec{B} = -2.67 \times 10^{-11} \cos(0.2513y - 75.40 \times 10^6 t + \varphi) \vec{e}_z$ .
5. (a) 279 nm. (b)  $1.074 \times 10^{15}$  Hz. (c) O eixo dos  $z$
6. 
$$\vec{E} = \begin{cases} E_{\text{máx}} \sin(\omega t - \frac{\omega}{c} z) \vec{e}_x, & z > 0 \\ E_{\text{máx}} \sin(\omega t + \frac{\omega}{c} z) \vec{e}_x, & z < 0 \end{cases} \quad \vec{B} = \begin{cases} \frac{E_{\text{máx}}}{c} \sin(\omega t - \frac{\omega}{c} z) \vec{e}_y, & z > 0 \\ -\frac{E_{\text{máx}}}{c} \sin(\omega t + \frac{\omega}{c} z) \vec{e}_y, & z < 0 \end{cases}$$
7. A derivada de  $f(y + ct)$  em função de  $t$  é  $c f'(y + ct)$ . Substituindo na equação 12.17 obtem-se que a derivada de  $B$  é função de  $y$  é igual a  $-f'(y + ct)/c$ . Como a derivada de  $f(y + ct)$  em função de  $y$  é  $f'(y + ct)$ , então  $B$  é igual a  $-f(y + ct)/c$ .  
 A derivada de  $g(y - ct)$  em função de  $t$  é  $-c g'(y - ct)$ . Substituindo na equação 12.17 obtem-se que a derivada de  $B$  é função de  $y$  é igual a  $g'(y - ct)/c$ . Como a derivada de  $g(y - ct)$  em função de  $y$  é  $g'(y - ct)$ , então  $B$  é igual a  $g(y - ct)/c$ .
8.  $d = 35.7$  cm,  $\vec{B} = -B_{\text{máx}} \cos(2\pi(4.2 \times 10^8 t + 1.40x)) \vec{e}_z$ , ( $t$  em segundos,  $x$  em metros)
9.  $3.23 \times 10^{-19}$  J, 2.02 eV.
10. 620 nm. Trata-se de luz visível de cor laranja-vermelha.

# Bibliografia

Steve Adams and Jonhathan Allday. *Advanced Physics*. Oxford University Press, Oxford, 2000.

Marcelo Alonso and Edward J. Finn. *Física*. Addison-Wesley, 1999.

H. J. Blinchikoff and A. I. Zverev. *Filtering in the Time and Frequency Domains*. Noble Publishing, Atlanta, 2001.

Stanley J. Farlow. *An Introduction to Differential Equations and their Applications*. Mc Graw-Hill, Singapore, 1994.

Bernard Grob. *Basic Electronics*. Mc Graw-Hill, Columbus, 1997.

Eugene Hecht. *Óptica*. Fundação Caluste Gulbenkian, Lisboa, 1991.

Eugene Hecht. *Physics*. Wadsworth, Inc., California, 1994.

J.-M. Lévy-Leblond and André Butoli. *A Electricidade e o Magnetismo em Perguntas*. Gradiva, Lisboa, 1991.

Noemia Maciel, Jaime E. Villate, Carlos Azevedo, and F. Maciel Barbosa. *Eu e a Física 12*. Porto Editora, Porto, 2009.

Manuel de Medeiros Silva. *Introdução aos Circuitos Eléctricos e Electrónicos*. Fundação Caluste Gulbenkian, Lisboa, 2001.

Paul A. Tipler and Gene Mosca. *Physics for Scientists and Engineers*. W. H. Freeman and Company, New York, 2004.

Jaime E. Villate. *Electromagnetismo*. Mc Graw-Hill, Lisboa, 1999.

Jean Walker. *O Grande Circo da Física*. Gradiva, Lisboa, 1975.

## Eletricidade e magnetismo

Alguns livros com um nível semelhante a estes apontamentos são os livros de [Adams and Allday \(2000\)](#), [Hecht \(1994\)](#), [Tipler and Mosca \(2004\)](#) e [Alonso and Finn \(1999\)](#). Um livro com um nível mais elementar é o de [Maciel et al. \(2009\)](#), e um livro com um nível mais teórico é: [Villate \(1999\)](#). As ondas eletromagnéticas e a luz fazem parte do livro de Óptica de [Hecht \(1991\)](#).

## Circuitos e electrónica

Um livro com nível introdutório é o de [Grob \(1997\)](#). Uma referência mais avançada, é o livro de [Blinchikoff and Zverev \(2001\)](#). Uma boa referência sobre circuitos elétricos é o livro de [Silva \(2001\)](#).

## Equações diferenciais

Uma boa referência é o livro de [Farlow \(1994\)](#).

## Divulgação científica

O livro de [Walker \(1975\)](#) desafia o leitor a responder várias questões sobre fenómenos físicos e as respostas são dadas no fim. O livro de [Lévy-Leblond and Butoli \(1991\)](#) segue um formato similar, mas tentando abranger o programa completo de uma disciplina de eletricidade e magnetismo.

# Índice

## A

alternador, 130  
amplitude, 188  
ânodo, 22  
armadilha de iões, 93  
armaduras, 51  
atenuador, 158

## B

balastro, 134  
bateria, 35  
buraco, 24

## C

cátodo, 22  
código de cores, 38  
cabs, 170  
campo  
    elétrico, 8  
    na atmosfera, 14  
    magnético, 42  
capacidade, 50  
carg, 170  
carga  
    elementar, 3  
    induzida, 49  
    linear, 90  
    pontual, 6  
    por indução, 11  
    por atrito, 4  
    superficial, 89  
circuito  
    LC, 160  
    RC, 140  
    RLC, 141

coeficiente

    de temperatura, 40  
comprimento de onda, 188  
condensador, 49  
    plano, 54  
    variável, 55  
condutor, 10  
conservação  
    da carga, 5  
    da energia mecânica, 17  
constante  
    de Coulomb, 6  
    de tempo, 141  
    dielétrica, 6, 52  
    magnética, 117  
corrente  
    alternada, 161  
    eficaz, 172  
    elétrica, 16, 26  
    estacionária, 28, 65  
    induzida, 41  
    transitória, 166  
coulomb (unidade), 3  
Coulomb, Charles, 6  
curto-circuito, 47

## D

díodos emissores de luz, 194  
delta de Dirac, 203  
derivada direccional, 94  
diamagnetismo, 110  
dielétrico, 52  
diferença de potencial, 16  
dipolo elétrico, 10, 83

divergência, 109  
divisor de voltagem, 64

**E**

Edison, Thomas A., 159  
efeito  
    fotoelétrico, 193  
    Joule, 28  
    Meissner, 41  
elétrodos, 20  
eletrólito, 20  
eletrão, 3  
    de condução, 10  
eletrão-volt, 100  
eletro-íman, 42  
energia  
    potencial eletrostática, 17  
equação  
    de onda, 185  
equipotenciais, 97  
escalão unitário, 201  
espectro  
    eletromagnético, 189  
espira, 112  
expand, 151

**F**

farad (unidade), 50  
Faraday, Michael, 127  
fase, 161  
    inicial, 188  
fasor, 163  
fator de potência, 172  
fem, 22  
    autoinduzida, 132  
    induzida, 125  
ferromagnetismo, 110  
filtro  
    de velocidades, 116  
    passa-alto, 155  
    passa-baixo, 158  
    passa-banda, 174  
fluxo  
    elétrico, 84

    magnético, 127  
força  
    elétrica, 3, 6  
    eletromotriz, *ver* fem  
    magnética, 108  
fotão, 194  
Franklin, Benjamin, 5  
frequência, 130, 161  
    de ressonância, 175  
    angular, 161, 162  
    de corte, 173  
função  
    alternada, 161  
    de transferência, 155  
    de Heaviside, 201  
    escalão unitário, 147  
    sinusoidal, 161

**G**

Galvani, Luigi, 19  
garrafa de Leiden, 49  
Gauss, Karl F., 84  
gerador, 36  
Guerra das Correntes, 159

**H**

henry, 131

**I**

ião, 4  
ilt, 151  
íman, 41, 108  
impedância  
    complexa, 166  
    generalizada, 146  
impulso  
    unitário, 203  
impulso unitário, 154  
indução  
    eletromagnética, 123  
    eletrostática, 11  
indutância mútua, 131  
indutor, 132  
inversor, 158

isolador, 10

## J

joule (unidade), 17

Joule, James, *ver* efeito Joule

## K

Kamerlingh Onnes, Heike, 41

## L

laplace, 150

lei

das correntes, *ver* lei dos nós

das malhas, 66

das tensões, *ver* lei das malhas

de Ampère, 117

de Coulomb, 6

de Faraday, 127

de Gauss, 84, 87

de Kirchhoff, 65

de Lenz, 128

de Ohm, 34, 142

de Ohm generalizada, 146

dos nós, 65

levitação magnética, 41

Lichtengerg, 53

linhas de campo, 8

Liquid Crystal Display, 191

luz

infravermelha, 190

solar, 190

visível, 190

## M

maglev, 42

malhas

lei das, 66

método das, 66

Maxima, 70, 81, 150

Meissner, Walther, *ver* efeito Meissner

mercúrio

resistividade, 41

metais

ativos, 20

microondas, 190

momento magnético, 111

movimento

helicoidal, 116

multímetro, 16

## N

nós

lei dos, 65

neutrões, 2

Newton, Isaac, 6

## O

ohm (unidade), 35

ohmico (material), 34

onda plana polarizada, 187

oscilador harmônico simples, 161

## P

pára-raios, 102

paramagnetismo, 110

partfrac, 152

passa-banda, 174

Paul, Wolfgang, 93

PCB, *ver* circuito impresso

período, 161, 188

permeabilidade magnética, 117

pilha, 20, 35

placa

de circuito impresso, 38

polarizar, 191

polinômio característico, 155

ponto de sela, 99

potência

instantânea, 171

média, 172

potenciômetro, 64

potencial, 16

eletrostático, 17

prefixos das potências de 10, 205

prisma, 190

protões, 2

## Q

quantização

da carga, 5

## R

raios

X, 31

reatância, 166

capacitiva, 166

indutiva, 166

receptor, 36

regra

de Cramer, 69

rejeita-banda, 178

resistência, 34, 166

equivalente, 43

interna, 36

resistências

em série, 43

em paralelo, 43

resistividade, 39, 40

resposta

de frequência, 173

transitória, 58, 64, 72, 133, 147

ressonância, 175

rigidez dielétrica, 52

## S

série

galvânica, 20, 21

triboelétrica, 5

semicondutor, 23

tipo N, 23

tipo P, 24

sinal, 140

de entrada, 141

de saída, 141

stripboard, 63

supercondutividade, 41

a altas temperaturas, 42

## T

temperatura

crítica, 41

tensão

alternada, 130, 164

eficaz, 172

terra, 51

tesla, 111

Tesla, Nicola, 134, 159

torque, 111

triângulo de impedância, 166

tubo de fluxo, 85

## U

ultracondensadores, 56

## V

van Musschenbroek, Pieter, 49

variáveis características, 186

volt (unidade), 17

voltímetro, 16

Volta, Alessandro, 15

## W

watt (unidade), 29

Westinghouse, George, 159

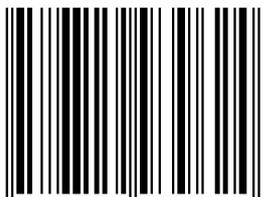
Wimshurst

máquina de, 1



Este livro pode ser descarregado livremente, em ficheiro, ou comprado, em versão impressa,  
no sítio: <http://www.villate.org/livros.html>

ISBN 978-972-99396-2-4



9 789729 939624